

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

VESTIBULAR 2016



PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Esta prova tem duração de **quatro horas**.
2. Não é permitido deixar o local de exame antes de decorridas **duas horas** do início da prova.
3. Você poderá usar **apenas** lápis (ou lapiseira), caneta preta de material transparente, borracha e régua. **É proibido portar qualquer outro material escolar.**
4. Esta prova é composta de **20 questões de múltipla escolha** (numeradas de 01 a 20) e de **10 questões dissertativas** (numeradas de 21 a 30).
5. As 20 questões de múltipla escolha correspondem a 50% do valor da prova e as questões dissertativas, aos 50% restantes.
6. Você recebeu este **caderno de questões e um caderno de soluções com duas folhas de rascunho**. Verifique se o caderno de questões está completo.
7. Numere sequencialmente de 21 a 30, a partir do verso da capa, cada página do caderno de soluções. O número atribuído a cada página corresponde ao da questão a ser resolvida. **Não** escreva no verso da parte superior da capa (região sombreada) do caderno de soluções. As **folhas centrais coloridas** deverão ser utilizadas **apenas como rascunho** e, portanto, **não** devem ser numeradas e **nem** destacadas pelo candidato.
8. Cada questão de múltipla escolha admite **uma única** resposta.
9. As resoluções das questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, podem ser feitas a lápis e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Respeite a ordem e o espaço disponível no caderno de soluções. Sempre que possível, use desenhos e gráficos.
10. Antes do final da prova, você receberá uma **folha de leitura óptica, destinada à transcrição das questões numeradas de 1 a 20**. Usando **caneta preta de material transparente**, assinale a opção correspondente à resposta de cada uma das questões de múltipla escolha. Você deve preencher todo o campo disponível para a resposta, sem extrapolar-lhe os limites, conforme instruções na folha de leitura óptica.
11. Cuidado para não errar no preenchimento da folha de leitura óptica. Se isso ocorrer, avise o fiscal, que lhe fornecerá uma folha extra, com o cabeçalho devidamente preenchido.
12. **Não haverá tempo suplementar para o preenchimento da folha de leitura óptica.**
13. Na última página do caderno de soluções, existe uma reprodução da folha de leitura óptica, que deverá ser preenchida com um simples traço a lápis durante a realização da prova.
14. A **não devolução** do caderno de soluções, do caderno de questões e/ou da folha de leitura óptica implicará a **desclassificação do candidato**.
15. No dia 22/12/2015, a partir das 10:00 horas, o gabarito da parte objetiva desta prova estará disponibilizado no *site* do ITA (www.ita.br).
16. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar.**

NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$	: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	: conjunto dos números complexos
i	: unidade imaginária: $i^2 = -1$
$ z $	: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\text{Re}(z)$	: parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$\text{Im}(z)$	: parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$
$\det M$	: determinante da matriz M
M^T	: transposta da matriz M
M^{-1}	: inversa da matriz M
I_n	: matriz identidade $n \times n$
MN	: produto das matrizes M e N
$d(P, r)$	: distância do ponto P à reta r
$\overline{AB}$	: segmento de reta de extremidades nos pontos A e B
$[a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$[a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$]a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
$]a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$X \setminus Y$	$= \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Considere as seguintes afirmações:

- I. A função $f(x) = \log_{10} \left(\frac{x-1}{x} \right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.
- II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ possui uma única solução real.
- III. A equação $(x+1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

- | | | |
|--------------------|----------------------|------------------------|
| A () apenas I. | B () apenas I e II. | C () apenas II e III. |
| D () I, II e III. | E () apenas III. | |

Questão 2. Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[3]{x}$ é igual a

- | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| A () 285. | B () 286. | C () 287. | D () 288. | E () 289. |
|------------|------------|------------|------------|------------|

Questão 3. Escolhendo-se, aleatoriamente, três números inteiros distintos no intervalo $[1, 20]$, a probabilidade de que eles estejam, em alguma ordem, em progressão geométrica é igual a

- | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| A () $\frac{2}{285}$ | B () $\frac{2}{217}$ | C () $\frac{1}{190}$ | D () $\frac{4}{225}$ | E () $\frac{1}{380}$ |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|

Questão 4. Se $\operatorname{tg} x = \sqrt{7}$ e $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, então $\operatorname{sen} 3x$ é igual a

- A () $-\frac{\sqrt{14}}{8}$. B () $\frac{\sqrt{14}}{8}$. C () $\frac{\sqrt{14}}{4}$. D () $-\frac{\sqrt{14}}{4}$. E () $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

Questão 5. Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1000$ e $a_n = \log_{10}(1 + a_{n-1})$ para $n \geq 2$. Considere as afirmações a seguir:

- I. A sequência (a_n) é decrescente.
 II. $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.
 III. $a_n < 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas I e II. C () apenas II e III.
 D () I, II e III. E () apenas III.

Questão 6. Seja P_n um polígono convexo regular de n lados, com $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

- I. P_n é inscritível numa circunferência.
 II. P_n é circunscritível a uma circunferência.
 III. Se ℓ_n é o comprimento de um lado de P_n e a_n é o comprimento de um apótema de P_n , então $\frac{a_n}{\ell_n} \leq 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas II. C () apenas III.
 D () apenas I e II. E () I, II e III.

Questão 7. Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm². Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede

- A () $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. B () $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. C () $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D () $\frac{2}{\sqrt{6}}$ E () $\frac{3}{\sqrt{6}}$.

Questão 8. Se o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ x + 2y + 7z = 3 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$$

é impossível, então os valores de a e b são tais que

- A () $a = 6$ e $b \neq 4$. B () $a \neq 6$ e $b \neq 4$. C () $a \neq 6$ e $b = 4$.
 D () $a = 6$ e $b = 4$. E () a é arbitrário e $b \neq 4$.

Questão 9. Se P e Q são pontos que pertencem à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e à reta $y = 2(1 - x)$, então o valor do cosseno do ângulo $\widehat{POQ}$ é igual a

- A () $-\frac{3}{5}$. B () $-\frac{3}{7}$. C () $-\frac{2}{5}$. D () $-\frac{4}{5}$. E () $-\frac{1}{7}$.

Questão 10. Um triângulo retângulo tem perímetro igual a $\ell\sqrt{5}$, em que ℓ é o comprimento da hipotenusa. Se α e β são seus ângulos agudos, com $\alpha < \beta$, então $\sin(\beta - \alpha)$ é igual a

- A () $5 - 2\sqrt{5}$. B () $-6 + 3\sqrt{5}$. C () $\sqrt{16\sqrt{5} - 35}$.
D () $\sqrt{20\sqrt{5} - 44}$. E () $\sqrt{18\sqrt{5} - 40}$.

Questão 11. Se $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a

- A () $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ B () $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ C () $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ D () $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ E () $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Questão 12. Considere as afirmações a seguir:

- I. Se z e w são números complexos tais que $z - iw = 1 - 2i$ e $w - z = 2 + 3i$, então $z^2 + w^2 = -3 + 6i$.
II. A soma de todos os números complexos z que satisfazem $2|z|^2 + z^2 = 4 + 2i$ é igual a zero.
III. Se $z = 1 - i$, então $z^{59} = 2^{29}(-1 + i)$.

É (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas I e II. C () apenas I e III.
D () apenas II e III. E () I, II e III.

Questão 13. Sejam λ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam-se no ponto R exterior a λ . Então, a área do triângulo PQR , em cm^2 , é igual a

- A () $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B () $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C () $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D () $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. E () $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Questão 14. Se a reta de equação $x = a$ divide o quadrilátero cujos vértices são $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ e $(6, 4)$ em duas regiões de mesma área, então o valor de a é igual a

- A () $2\sqrt{5} - 1$. B () $2\sqrt{6} - 1$. C () $3\sqrt{5} - 4$. D () $2\sqrt{7} - 2$. E () $3\sqrt{7} - 5$.

Questão 15. Seja p o polinômio dado por $p(x) = x^8 + x^m - 2x^n$, em que os expoentes $8, m, n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica cuja soma dos termos é igual a 14. Considere as seguintes afirmações:

- I. $x = 0$ é uma raiz dupla de p .
II. $x = 1$ é uma raiz dupla de p .
III. p tem quatro raízes com parte imaginária não nula.

Destas, é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas I e II. C () apenas I e III.
D () apenas II e III. E () I, II e III.

Questão 16. Seja ABC um triângulo equilátero e suponha que M e N são pontos pertencentes ao lado $\overline{BC}$ tais que $BM = MN = NC$. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo $\widehat{MAN}$, então o valor de $\cos \alpha$ é

- A () $\frac{13}{14}$. B () $\frac{14}{15}$. C () $\frac{15}{16}$. D () $\frac{16}{17}$. E () $\frac{17}{18}$.

Questão 17. Uma esfera S_1 , de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K . Outra esfera, S_2 , de raio r , com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K . O volume de K é igual a

- A () $\frac{\pi R^5}{3r(R-r)}$. B () $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$. C () $\frac{\pi R^5}{r(R-r)}$. D () $\frac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$. E () $\frac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$.

Questão 18. Considere o polinômio p com coeficientes complexos definido por

$$p(z) = z^4 + (2+i)z^3 + (2+i)z^2 + (2+i)z + (1+i).$$

Podemos afirmar que

- A () nenhuma das raízes de p é real.
 B () não existem raízes de p que sejam complexas conjugadas.
 C () a soma dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2 + \sqrt{2}$.
 D () o produto dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2\sqrt{2}$.
 E () o módulo de uma das raízes de p é igual a $\sqrt{2}$.

Questão 19. Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguido dos demais, o maior valor possível de N é igual a

- A () 10 B () 15 C () 20 D () 25 E () 30

Questão 20. Em um triângulo equilátero ABC de lado 2, considere os pontos P , M e N pertencentes aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que

- a) P é o ponto médio de $\overline{AB}$;
 b) M é o ponto médio de $\overline{BC}$;
 c) PN é a bissetriz do ângulo $\widehat{APC}$.

Então, o comprimento do segmento $\overline{MN}$ é igual a

- A () $\sqrt{10 - 4\sqrt{3}}$ B () $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$ C () $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$
 D () $\sqrt{10 - 5\sqrt{3}}$ E () $\sqrt{5\sqrt{3} - 5}$

**AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER
RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.**

Questão 21. Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

- a) O domínio D_f da função f .
- b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.
- b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

Questão 22. Sejam x e y pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$. Determine todos os pares ordenados (x, y) tais que

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos x - \sin y &= \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} \sin x + \sqrt{3} \cos y &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Questão 23. Um hexágono convexo regular H e um triângulo equilátero T estão inscritos em circunferências de raios R_H e R_T , respectivamente. Sabendo-se que H e T têm mesma área, determine a razão $\frac{R_H}{R_T}$.

Questão 24. Seja A a matriz de ordem 3×2 , dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Determine todas as matrizes B tais que $BA = I_2$.
- b) Existe uma matriz B com $BA = I_2$ que satisfaça $BB^T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes.

Questão 25. Numa certa brincadeira, um menino dispõe de uma caixa contendo quatro bolas, cada qual marcada com apenas uma destas letras: N, S, L e O. Ao retirar aleatoriamente uma bola, ele vê a letra correspondente e devolve a bola à caixa. Se essa letra for N, ele dá um passo na direção Norte; se S, em direção Sul, se L, na direção Leste e se O, na direção Oeste.

Qual a probabilidade de ele voltar para a posição inicial no sexto passo?

Questão 26. Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e $P = (a, b)$ um ponto de $\mathbb{R}^2$. Define-se *distância de P a S* , $d(P, S)$, como a menor das distâncias $d(P, Q)$, com $Q \in S$:

$$d(P, S) = \min\{d(P, Q) : Q \in S\}.$$

Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y \geq 2\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

- a) Determine $d(P, S_1)$ quando $P = (1, 4)$ e $d(Q, S_1)$ quando $Q = (-3, 0)$.
- b) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de S_1 e de S_2 .

Questão 27. Sejam a, b, c números reais com $a \neq 0$.

- a) Mostre que a mudança $x + \frac{1}{x} = z$ transforma a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

numa equação de segundo grau.

- b) Determine todas as raízes da equação $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

Questão 28. Considere as circunferências

$$\lambda_1 : x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20$$

e

$$\lambda_2 : x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8.$$

O triângulo ABC satisfaz as seguintes propriedades:

- a) o lado $\overline{AB}$ coincide com a corda comum a λ_1 e λ_2 ;
- b) o vértice B pertence ao primeiro quadrante;
- c) o vértice C pertence a λ_1 e a reta que contém $\overline{AC}$ é tangente a λ_2 .

Determine as coordenadas do vértice C .

Questão 29. Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

Questão 30. Em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1 inscreve-se um tetraedro regular com uma de suas faces paralela à base do cone, e o vértice oposto coincidindo com o centro da base do cone. Determine o volume do tetraedro.