INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
VESTIBULAR 2015

PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Esta prova tem duração de **quatro horas.**
2. Não é permitido deixar o local de exame antes de decorridas **duas horas** do início da prova.
3. Você pode usar apenas lápis (ou lapiseira), caneta, borracha e régua. **É proibido portar qualquer outro material escolar**.
4. Esta prova é composta de **20 questões de múltipla escolha** (numeradas de 01 a 20) e de **10 questões dissertativas** (numeradas de 21 a 30).
5. As 20 questões de múltipla escolha correspondem a 50% do valor da prova e as questões dissertativas, aos 50% restantes.
6. Você recebeu este **caderno de questões e um caderno de soluções com duas folhas de rascunho.** Verifique se o caderno de questões está completo.
7. Numere sequencialmente de 21 a 30, a partir do verso da capa, cada página do caderno de soluções. O número atribuído a cada página corresponde ao da questão a ser resolvida. **Não** escreva no verso da parte superior da capa (região sombreada) do caderno de soluções. As **folhas centrais coloridas** deverão ser utilizadas **apenas como rascunho** e, portanto, **não** devem ser numeradas **nem** destacadas pelo candidato.
8. Cada questão de múltipla escolha admite **uma única** resposta.
9. As resoluções das questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, podem ser feitas a lápis e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Respeite a ordem e o espaço disponível no caderno de soluções. Sempre que possível, use desenhos e gráficos.
10. Antes do final da prova, você receberá uma **folha de leitura óptica, destinada à transcrição das respostas das questões numeradas de 01 a 20.** Usando **caneta preta**, assinale a opção correspondente à resposta de cada uma das questões de múltipla escolha. Você deve preencher todo o campo disponível para a resposta, sem extrapolar-lhe os limites, conforme instruções na folha de leitura óptica.
11. Cuidado para não errar no preenchimento da folha de leitura óptica. Se isso ocorrer, avise o fiscal, que lhe fornecerá uma folha extra com o cabeçalho devidamente preenchido.
12. **Não haverá tempo suplementar para o preenchimento da folha de leitura óptica.**
13. Na última página do caderno de soluções, existe uma reprodução da folha de leitura óptica, que deverá ser preenchida com um simples traço a lápis durante a realização da prova.
14. A **não devolução** do caderno de soluções, do caderno de questões ou da folha de leitura óptica implicará a **desclassificação do candidato**.
15. **Somente** os candidatos que permanecerem na sala até o final das quatro horas de prova estarão autorizados a levar o caderno de questões.
16. No dia 17/12/2014, a partir das 10:00 horas, o gabarito da parte objetiva desta prova estará disponibilizado no *site* do ITA (www.ita.br).
17. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar.**

NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\text{Re}(z)$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$

$\text{Im}(z)$: parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$

$\det A$: determinante da matriz A

$\text{tr}\, A$: traço da matriz quadrada A, que é definido como a soma dos elementos da diagonal principal de A.

Potência de matriz : $A^1 = A, A^2 = A \cdot A, \ldots, A^k = A^{k-1} \cdot A$, sendo A matriz quadrada e k inteiro positivo.

$\text{d}(P, r)$: distância do ponto P à reta r

$\overline{AB}$: segmento de extremidades nos pontos A e B

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a, b[\ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$X \setminus Y = \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$

$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, sendo n inteiro não negativo

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $\ln \sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

A ( ) nenhuma. B ( ) apenas II. C ( ) apenas I e II.
D ( ) apenas I e III. E ( ) I, II e III.

Questão 2. Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - 3i| < \sqrt{19}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 7/2\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 6z + 10 = 0\}$. Então, $(A \setminus B) \cap C$ é o conjunto

A ( ) $\{-1 - 3i, -1 + 3i\}$. B ( ) $\{-3 - i, -3 + i\}$. C ( ) $\{-3 + i\}$.
D ( ) $\{-3 - i\}$. E ( ) $\{-1 + 3i\}$.

Questão 3. Se $z = \left(\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor de $2 \operatorname{arcsen}(\operatorname{Re}(z)) + 5 \operatorname{arctg}(2 \operatorname{Im}(z))$ é igual a

A ( ) $-\dfrac{2\pi}{3}$. B ( ) $-\dfrac{\pi}{3}$. C ( ) $\dfrac{2\pi}{3}$. D ( ) $\dfrac{4\pi}{3}$. E ( ) $\dfrac{5\pi}{3}$.

Questão 4. Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r : 3x + 4y - 4 = 0$ e $s : 3x + 4y - 19 = 0$. A área do círculo determinado por C é igual a

A ( ) $\dfrac{5\pi}{7}$. B ( ) $\dfrac{4\pi}{5}$. C ( ) $\dfrac{3\pi}{2}$ D ( ) $\dfrac{8\pi}{3}$. E ( ) $\dfrac{9\pi}{4}$.

Questão 5. Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas II. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.
D ( ) apenas II e III. E ( ) I, II e III.

Questão 6. Considere a equação $\dfrac{a}{1 - x^2} - \dfrac{b}{x - 1/2} = 5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \dfrac{1}{2}$, $x \neq -1$ e $x \neq 1$.

III. $x = \dfrac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas II. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.
D ( ) apenas II e III. E ( ) I, II e III.

Questão 7. Considere o polinômio p dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p, então o valor de $b - a$ é igual a

A ( ) -36. B ( ) -12. C ( ) 6. D ( ) 12. E ( ) 24.

Questão 8. Seja p o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, 15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

A ( ) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.
B ( ) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.
C ( ) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.
D ( ) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.
E ( ) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

Questão 9. Considere todos os triângulos retângulos com os lados medindo $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ e a. Dentre esses triângulos, o de maior hipotenusa tem seu menor ângulo, em radianos, igual a

A ( ) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{4}$.
B ( ) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.
C ( ) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.
D ( ) $\operatorname{arctg} \frac{3}{5}$.
E ( ) $\operatorname{arctg} \frac{4}{5}$.

Questão 10. Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2 \operatorname{sen} x - \cos x = 1$ são

A ( ) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π.
B ( ) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e π.
C ( ) $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π.
D ( ) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π.
E ( ) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π.

Questão 11. Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \,]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad \cos^2 \frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4 \frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}.$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

A ( ) -1.
B ( ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
C ( ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
D ( ) $-\frac{1}{2}$.
E ( ) 0.

Questão 12. Seja $A = (a_{ij})_{5\times 5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j - 1)$, $1 \le i, j \le 5$. Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i.

II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.

III. tr A é um número primo.

É (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I.
B ( ) apenas I e II.
C ( ) apenas II e III.
D ( ) apenas I e III.
E ( ) I, II e III.

Questão 13. Considere a matriz $M = (m_{ij})_{2\times 2}$ tal que $m_{ij} = j - i + 1$, $i, j = 1, 2$. Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 252,$$

então o valor de n é igual a

A ( ) 4. B ( ) 5. C ( ) 6. D ( ) 7. E ( ) 8.

Questão 14. Considere os pontos $A = (0, -1)$, $B = (0, 5)$ e a reta $r : 2x - 3y + 6 = 0$. Das afirmações a seguir:

I. $\mathrm{d}(A, r) = \mathrm{d}(B, r)$.

II. B é simétrico de A em relação à reta r.

III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero ABC, de vértice $C = (-3\sqrt{3}, 2)$ ou $C = (3\sqrt{3}, 2)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I. B ( ) II. C ( ) I e II. D ( ) I e III. E ( ) II e III.

Questão 15. Dados o ponto $A = \left(4, \dfrac{25}{6}\right)$ e a reta $r : 3x + 4y - 12 = 0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\dfrac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a

A ( ) $\dfrac{22}{3}$ e $\dfrac{40}{3}$. B ( ) $\dfrac{23}{3}$ e $\dfrac{40}{3}$. C ( ) $\dfrac{25}{3}$ e $\dfrac{31}{3}$. D ( ) $\dfrac{25}{3}$ e $\dfrac{35}{3}$. E ( ) $\dfrac{25}{3}$ e $\dfrac{40}{3}$.

Questão 16. Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento l fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.

II. O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

III. Os pontos $(2, 3)$, $(4, -1)$ e $(3, 1)$ pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.
D ( ) I e II. E ( ) I e III.

Questão 17. Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é

A ( ) $\dfrac{21}{8}$. B ( ) $\dfrac{27}{8}$. C ( ) $\dfrac{35}{8}$. D ( ) $\dfrac{37}{8}$. E ( ) $\dfrac{45}{8}$.

Questão 18. Num triângulo PQR, considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

A ( ) 5. B ( ) 6. C ( ) 8. D ( ) 10. E ( ) 15.

Questão 19. Considere uma circunferência C, no primeiro quadrante, tangente ao eixo Ox e à reta $r: x - y = 0$. Sabendo-se que a potência do ponto $O = (0, 0)$ em relação a essa circunferência é igual a 4, então o centro e o raio de C são, respectivamente, iguais a

A ( ) $(2, 2\sqrt{2} - 2)$ e $2\sqrt{2} - 2$.

B ( ) $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

C ( ) $(2, \sqrt{2} - 1)$ e $\sqrt{2} - 1$.

D ( ) $(2, 2 - \sqrt{2})$ e $2 - \sqrt{2}$.

E ( ) $(2, 4\sqrt{2} - 4)$ e $4\sqrt{2} - 4$.

Questão 20. Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

A ( ) $\sqrt[3]{2} - h$. B ( ) $\sqrt[3]{2} - 1$. C ( ) $(\sqrt[3]{2} - 1)h$. D ( ) h. E ( ) $\frac{h}{2}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Considere as funções f_1, f_2, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f_1(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$, $f_2(x) = \frac{3}{2}|x + 1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine:
a) Todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$.
b) O menor valor assumido pela função f.
c) Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

Questão 22. Considere o polinômio p dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$, em que β é um número real.
a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.
b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio p.

Questão 23. Sabe-se que $1, B, C, D$ e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:
(i) B, C, D, E são dois a dois distintos;
(ii) os números $1, B, C$, e os números $1, C, E$, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;
(iii) os números B, C, D, E, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.
Determine B, C, D, E.

Questão 24. Seja $M \subset \mathbb{R}$ dado por $M = \{|z^2 + az - 1| : z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 1\}$, com $a \in \mathbb{R}$. Determine o maior elemento de M em função de a.

Questão 25. Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.
a) Determine o número de elementos de S.
b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

Questão 26. Três pessoas, aqui designadas por A, B e C, realizam o seguinte experimento: A recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal $+$ ou o sinal $-$, passando em seguida a B, que mantém ou troca o sinal marcado por A e repassa o cartão a C. Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo de $1/3$ a probabilidade de A escrever o sinal $+$ e de $2/3$ as respectivas probabilidades de B e C trocarem o sinal recebido, determine a probabilidade de A haver escrito o sinal $+$ sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

Questão 27. Seja n um inteiro positivo tal que $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$.
a) Determine n.
b) Determine $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{24}$.

Questão 28. Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\begin{cases} 2x + by &= \alpha \\ cx + y &= \beta \end{cases} \qquad\qquad T\begin{cases} cx + 3y &= \alpha \\ 4x + dy &= \beta \end{cases}$$

Questão 29. Sabe-se que a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo agudo θ. Determine a tangente de θ.

Questão 30. Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.