CONCURSO DE ADMISSÃO
AO
CURSO DE GRADUAÇÃO E FORMAÇÃO

MATEMÁTICA

CADERNO DE QUESTÕES

2023/2024

1ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Dada a matriz

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

calcule $M^{2020} + M^{2022} + M^{2024} + M^{2025} + M^{2029}$.

2ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Seja i tal que $i^2 = -1$. Determine a área do triângulo no plano complexo cujos vértices são as raízes da equação

$$\left(Z - \frac{3i}{2}\right)^3 = -27i$$

3ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Resolva a seguinte inequação para x real:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \text{log}_2 x & 1 \\ 4 & (\text{log}_2 x)^2 & 1 \end{vmatrix} \leqslant \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{colog}_2 x & 1/2 \\ 1 & (\text{colog}_2 x)^2 & 1/4 \end{vmatrix}$$

4ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Para n natural positivo, o número O_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética de razão 6 iniciada em 1. Dos 2024 primeiros números O_n, quantos apresentam resto 1 na divisão por 8 ?

5ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Para cada número inteiro $k \geqslant 1$, seja $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1} n(n+1)}$. Determine o menor valor de k para o qual

$$|S_k - 1| < \frac{265}{4608}$$

6ª QUESTÃO	Valor: 1,0

João nasceu no ano n e está prestando vestibular para o IME em 2023. Sejam A, B e C conjuntos de inteiros positivos tais que $|A| = |B| + 4$. Sabe-se que há n funções estritamente crescentes de A para C , bem como de B para C.

Observações:

- $|S|$ representa o número de elementos do conjunto S ;
- uma função é estritamente crescente quando $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Diante do exposto, determine:

a) o número de funções f estritamente crescentes de A para C em função de $|A|$ e $|C|$;
b) o ano no qual João nasceu.

7ª QUESTÃO	Valor: 1,0

Dado um plano π e uma reta r nele contida, sejam A e B pertencentes a π dois pontos em um mesmo semiplano definido por r. O ponto A' é o simétrico a A em relação à reta r. Os segmentos de reta AA' e $A'B$ interceptam a reta r nos pontos C e M, respectivamente. Se N é um ponto da reta r distinto de M, prove que

$$\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AN} + \overline{NB}$$

8ª QUESTÃO	Valor: 1,0

Dada a equação abaixo onde o valor de α é um número real

$$\frac{\alpha \cos(x)}{2\cos(2x) - 1} = \frac{\alpha + \operatorname{sen}(x)}{(\cos^2(x) - 3\operatorname{sen}^2(x))\operatorname{tg}(x)}$$

Determine:

a) os valores de α para os quais a equação admite solução;
b) as soluções, em radianos, da equação em função de α.

9ª QUESTÃO	Valor: 1,0

Os pontos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 5)$ e $D(7, 3)$ situam-se sobre lados distintos de um quadrado $EFGH$. Determine as coordenadas dos vértices desse quadrado.

10ª QUESTÃO	Valor: 1,0

Considere uma pirâmide triangular regular reta de altura h. Uma esfera de raio r contém os ortocentros das faces laterais da pirâmide e o vértice do qual foi traçada a altura da pirâmide. Calcule o volume da pirâmide em função de r e h.