

# Sumário

## 1º DIA:

Matemática.....	2
Física.....	16
Química.....	44

## 2º DIA:

Matemática.....	54
-----------------	----

## 3º DIA:

Física.....	68
-------------	----

## 4º DIA:

Química.....	97
--------------	----

## 5º DIA (MISTA):

Português.....	108
Inglês.....	124

## Matemática

## 1ª QUESTÃO

Aristeu e seu irmão nasceram nos séculos XX e XXI, respectivamente. Neste ano, 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos três últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?

- (A) 23 (D) 32  
 (B) 26 (E) 39  
 (C) 29



Comenta

## SISTEMA DECIMAL

No problema em questão, tem-se:

- Aristeu → Nascimento = a b c d (século XX)
- Irmão → Nascimento = x y z t (século XXI)

Daí,

$$\text{Idade (Aristeu)} = b + c + d$$

$$\text{Idade (Irmão)} = y + z + t$$

Devemos ter:

$$\begin{cases} 2018 - abcd = b + c + d & \text{(I)} \\ 2018 - xyzt = y + z + t & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), tem-se:

$$2018 = 1000a + 101b + 11c + 2d$$

$$\text{Se } a = 1 \rightarrow 1018 = 101b + 11c + 2d$$

$$\text{Obviamente, } b = 9 \rightarrow 109 = 11c + 2d$$

$$\text{Segue que, } c = 9 \text{ e } d = 5$$

Podemos, finalmente, concluir que:

$$\text{Nascimento (Aristeu)} = 1995 \rightarrow \text{idade} = 9 + 9 + 5 = 23.$$

De (II), tem-se:

$$2018 = 1000x + 101y + 11z + 2t$$

$$\text{Se } x = 2 \rightarrow 18 = 101y + 11z + 2t$$

$$\text{Obviamente, } y = 0 \rightarrow 18 = 11z + 2t$$

$$\text{Segue que, } z = 0 \text{ e } t = 9$$

Podemos, finalmente, concluir que:

$$\text{Nascimento (irmão)} = 2009 \rightarrow \text{idade} = 0 + 0 + 9 = 9$$

Logo, a soma das idades dos irmãos é igual a  $23 + 9 = 32$ .

**Resposta correta: (D)**

2ª QUESTÃO

Os ângulos  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{100}$  são os termos de uma progressão aritmética na qual  $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$ . O valor de  $\text{sen}(\sum_{i=1}^{100} \theta_i)$  é:

- (A) -1
- (B)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C) 0
- (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (E) 1

 **Comenta**

**PROGRESSÃO ARITMÉTICA**

Se  $r$  a razão da PA  $\Rightarrow \theta_i = \theta_1 + (i - 1) \cdot r, \forall i = 1, 2, \dots, 100$ .

Logo,  $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\theta_1 + 10r) + (\theta_1 + 25r) + (\theta_1 + 74r) + (\theta_1 + 89r) = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow 4\theta_1 + 198r = \frac{\pi}{4}$$

Por outro lado,  $\sum_{i=1}^{100} \theta_i = \theta_1 + (\theta_1 + r) + (\theta_1 + 2r) + \dots + (\theta_1 + 99r)$

$$= 100\theta_1 + r \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 100\theta_1 + r \cdot 4950 = 25 \cdot (4\theta_1 + 198r) = 25 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Logo, } \text{sen}\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right) = \text{sen}\left(\frac{25\pi}{4}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Resposta correta: (D)**

3ª QUESTÃO

Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4 \log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 8
- (E) 16

 **Comenta**
**DETERMINANTE**

Inicialmente:

$$\log 81 = 4 \log 3; \log 900 = 2 + 2 \log 3; \log 300 = 2 + \log 3$$

$$(\log 9)^2 = 4(\log 3)^2.$$

Assim, sendo  $\log 3 = \ell$ , temos:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & \textcircled{1} \\ 4\ell & 2+2\ell & 2+\ell \\ 4\ell^2 & 2+4\ell+2\ell^2 & 4+4\ell+\ell^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Chió} &= \begin{vmatrix} 4\ell - 4(2+\ell) & 2+2\ell - 2(2+\ell) \\ 4\ell^2 - 4(4+4\ell+\ell^2) & 2+4\ell+2\ell^2 - 2(4+4\ell+\ell^2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -8 & -2 \\ -16-16\ell & -6-4\ell \end{vmatrix} = 8(6+4\ell) - 2(16+16\ell) \\ &= 16 \end{aligned}$$

**Resposta correta: (E)**

**4ª QUESTÃO**

Seja a inequação:

$$6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0$$

Seja  $(a, b)$  um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para  $b - a$  é:

(A) 2

(B)  $\frac{13}{6}$

(C)  $\frac{1}{3}$

(D)  $\frac{5}{2}$

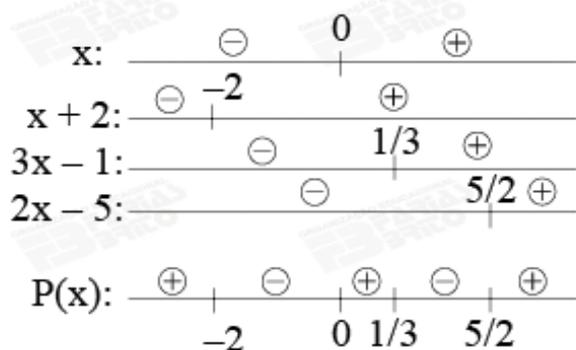
(E)  $\frac{8}{3}$

 **Comenta**
**DESIGUALDADE E POLINÔMIOS**

Temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x = x(6x^3 - 5x^2 - 29x + 10) = x(x+2)(6x^2 - 17x + 5) = \\ &= x(x+2)(3x-1)(2x-5) \end{aligned}$$

Estudo dos sinais:



Logo,  $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$

Como  $(a, b)$  está contido no conjunto solução e  $b - a$  é máximo, então  $(a, b) = (-2, 0)$  ou  $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$ . Como  $\frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6} > 2 = 0 - (-2)$ , então  $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$  e  $b - a = \frac{13}{6}$ .

**Resposta correta: (B)**

**5ª QUESTÃO**

Sejam  $x_1, x_2$  e  $x_3$  raízes da equação  $x^3 - ax - 16 = 0$ . Sendo  $a$  um número real, o valor de  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$  é igual a:

- (A)  $32 - a$
- (B)  $48 - 2a$
- (C)  $48$
- (D)  $48 + 2a$
- (E)  $32 + a$



**POLINÔMIOS**

Nestas condições, temos:

$$\begin{cases} x_1^3 - ax_1 - 16 = 0 \\ x_2^3 - ax_2 - 16 = 0 \\ x_3^3 - ax_3 - 16 = 0 \end{cases}$$

Somando:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - a \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\text{Girard}} - 48 = 0$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - a \cdot 0 - 48 = 0$$

Logo,

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 48$$

**Resposta correta: (C)**

6ª QUESTÃO

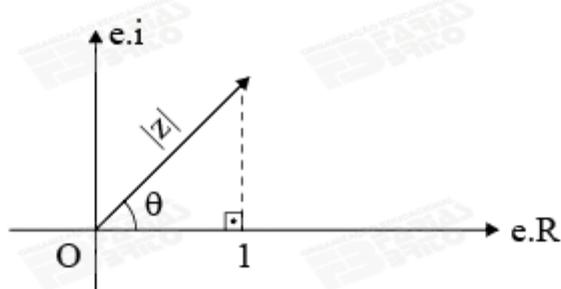
Seja  $z$  um número complexo tal que  $z^{12} \in \mathbb{R}$ ,  $Re(z) = 1$  e  $arg(z) \in (0, \frac{\pi}{2})$ . A soma dos inversos dos possíveis valores de  $|z|$  está no intervalo:

- (A)  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
- (B)  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$
- (C)  $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$
- (D)  $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$
- (E)  $(\frac{9}{2}, \frac{11}{2})$

**Comenta**

**COMPLEXOS**

Nestas condições, temos que:



$$\cos \theta = \frac{1}{|z|}$$

\*z é complexo  $\rightarrow z = |z| \text{ cis } \theta \rightarrow z^{12} = |z|^{12} \cdot \text{cis } 12 \theta$

Como  $z^{12}$  é real, devemos ter:

$$12 \theta = k\pi, \text{ k inteiro}$$

$$\theta = \frac{k\pi}{12} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12} \text{ (radianos)}$$

Assim, a soma desejada é igual a:

$$S_d = \frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|} + \frac{1}{|z_4|} + \frac{1}{|z_5|}$$

$$S_d = \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$S_d = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$S_d = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2} \cong 3,3 \rightarrow S_d \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Resposta correta: (C)

## 7ª QUESTÃO

Definimos a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), & n \geq 1 \\ f(2n + 1) = n^2, & n \geq 1 \end{cases}$$

Definimos a função  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  da seguinte forma:  $g(n) = f(n)f(n + 1)$ .

Podemos afirmar que:

- (A)  $g$  é uma função sobrejetora.
- (B)  $g$  é uma função injetora.
- (C)  $f$  é uma função sobrejetora.
- (D)  $f$  é uma função injetora.
- (E)  $g(2018)$  tem mais do que 4 divisores positivos.

 **Comenta**

## FUNÇÕES

Vejam as imagens iniciais de  $f$ :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	1	1	1	4	1	9	1

Assim,  $f$  não é injetora ( $f(1) = f(2)$ ) e não é sobrejetora, pois as imagens são todas quadrados perfeitos.

Daí,  $g(1) = f(1) f(2) = 1$  e  $g(2) = f(2) f(3) = 1$  e, portanto,  $g$  não injetora. As imagens de  $g$  também são todas quadrados perfeitos.

Por outro lado,  $g(2018) = f(2018) \cdot f(2019) = f(1009) \cdot f(2019) = 504^2 \cdot 1009^2 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 1009^2$ , que tem  $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 315$  divisores positivos.

**Resposta correta: (E)**

## 8ª QUESTÃO

Em um jogo de RPG "Role-Playing Game" em que os jogadores lançam um par de dados para determinar a vitória ou a derrota quando se confrontam em duelos, os dados são icosaedros regulares com faces numeradas de 1 a 20. Vence quem soma mais pontos na rolagem dos dados e, em caso de empate, os dois perdem. Em um confronto, seu adversário somou 35 pontos na rolagem de dados. É sua vez de rolar os dados. Qual sua chance de vencer este duelo?

- (A)  $1/2$                       (B)  $3/76$                       (C)  $9/400$                       (D)  $1/80$                       (E)  $3/80$

 **Comenta**

## PROBABILIDADE

Considerando o lançamento dos dois dados como um par ordenado  $(x, y)$ , o número de casos possíveis é  $20 \cdot 20 = 400$ .

Os casos favoráveis são aqueles cuja soma das coordenadas é  $\geq 36$ , com  $0 \leq x, y \leq 20$ .

Casos favoráveis:  $(20, 16)$ ,  $(19, 17)$ ,  $(18, 18)$ ,  $(17, 19)$ ,  $(16, 20)$ ,  $(20, 17)$ ,  $(19, 18)$ ,  $(18, 19)$ ,  $(17, 20)$ ,  $(20, 18)$ ,  $(19, 19)$ ,  $(18, 20)$ ,  $(20, 19)$ ,  $(19, 20)$  e  $(20, 20)$ .

Total de casos favoráveis: 15

$$\text{Logo, } P = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favoráveis}}{\text{n}^\circ \text{ de casos possíveis}} = \frac{15}{400} \Rightarrow P = \frac{3}{80}$$

**Resposta correta: (E)**

## 9ª QUESTÃO

Um hexágono regular está inscrito em um círculo de raio  $R$ . São sorteados 3 vértices distintos do hexágono, a saber:  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Seja  $r$  o raio do círculo inscrito ao triângulo  $ABC$ . Qual a probabilidade de que  $r = \frac{R}{2}$ ?

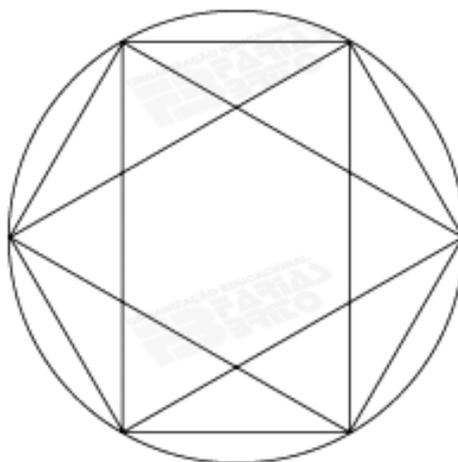
- (A) 0                      (B)  $1/10$                       (C)  $3/5$                       (D)  $1/20$                       (E)  $1/6$

 **Comenta**

## GEOMETRIA COM PROBABILIDADES

No  $\Delta ABC$ , a distância entre seu incentro e seu circuncentro é dado por  $\overline{OI} = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ . Como  $r = \frac{R}{2} \Rightarrow \overline{OI} = 0 \Rightarrow$  O incentro (I) deve coincidir com o circuncentro (O)  $\Rightarrow$  O  $\Delta ABC$  deve ser equilátero.

Dessa forma, o número de triplas de vértices que podemos escolher é  $\binom{6}{3}$ . Destes, apenas 2 são equiláteros (Veja a figura):



Portanto, a probabilidade desejada é  $P = \frac{2}{\binom{6}{3}} = \frac{2}{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!}} \Rightarrow P = \frac{2}{20} \Rightarrow P = \frac{1}{10}$

**Resposta correta: (B)**

10ª QUESTÃO

O número de soluções reais da equação abaixo é:

$$(\cos x)^{2018} = 2 - 2^{(x/\pi)^2}$$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

 **Comenta**

### DESIGUALDADES E CÁLCULO DIFERENCIAL

Seja  $f(x) = (\cos x)^{2018}$  e  $g(x) = 2 - 2^{(x/\pi)^2}$ . Note que tanto  $f$  como  $g$  são funções pares, então consideremos, a princípio,  $x > 0$ .

• Para  $x > \pi$ ,  $f(x) \geq 0$  ( $(\cos x)^{2018} = ((\cos x)^{1005})^2 \geq 0$ ) e  $g(x) < 2 - 2^{(\pi/\pi)^2} = 2 - 2^1 = 0$  (pois, para  $x > 0$ ,  $2^{\frac{x^2}{\pi^2}}$  é estritamente crescente). Assim,  $f(x) \geq 0 > g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$  e não temos  $f(x) = g(x)$  nesse caso.

• Para  $0 < x \leq \pi$ , observe que, se definirmos  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , então

$$h'(x) = \frac{1}{g(x)^2} [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)], \text{ de modo que } h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} > \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ e}$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} < \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

$$f(x) = (\cos x)^{2018} \Rightarrow f'(x) = 2018(\cos x)^{2017} \cdot (-\text{sen } x) \text{ e assim } \boxed{\frac{f'(x)}{f(x)} = -2018 \text{ tg } x} \quad (*)$$

$$g(x) = 2 - 2^{x^2/\pi^2} \Rightarrow g'(x) = -2^{x^2/\pi^2} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{2x}{\pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{2 \ln 2}{\pi^2} \cdot \left(\frac{2x^2/\pi^2}{2 - 2^{x^2/\pi^2}}\right) x} \quad (**)$$

Se  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , então  $\text{tg } x > x$ , donde, de (\*) e (\*\*):

$$\frac{f'(x)}{f(x)} < -2018x \stackrel{(1)}{<} -\frac{2 \ln 2}{\pi^2} \left(\frac{2^{1/4}}{2 - 2^{1/4}}\right) x \stackrel{(2)}{<} -\frac{2 \ln 2}{\pi^2} \left(\frac{2^{x^2/\pi^2}}{2 - 2^{x^2/\pi^2}}\right) x = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(1): 2018 > \frac{2 \ln 2}{\pi^2} \left(\frac{2^{1/4}}{2 - 2^{1/4}}\right) \approx 0,2033\dots$$

$$(2): 2^{x^2/\pi^2} < 2^{1/4} \text{ (pois } \frac{x^2}{\pi^2} < \frac{1}{4} \text{) e } 2 - 2^{x^2/\pi^2} > 2 - 2^{1/4} \Rightarrow \frac{2^{x^2/\pi^2}}{2 - 2^{x^2/\pi^2}} < \frac{2^{1/4}}{2 - 2^{1/4}}$$

Daí,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} < \frac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{(\cos 0)^{2018}}{2 - 2^{0/\pi^2}} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) < g(x)$  nesse intervalo.

Para  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ , temos que  $(\cos x)^{2018} = f(x)$  é estritamente crescente, e  $2 - 2^{(x/\pi)^2} = g(x)$  é estritamente decrescente. Portanto, nesse intervalo, há exatamente uma solução, de  $f(x) = g(x)$ , que denotaremos por  $x = \alpha$ , visto que  $f(\pi) = (\cos \pi)^{2018} = 1$  e  $g(\pi) = 2 - 2^{\pi^2/\pi^2} = 0$ .

Logo, para  $x > 0$ , temos exatamente uma solução de  $f(x) = g(x)$  ( $x = \alpha$ ), e para  $x < 0$ , temos exatamente uma solução de  $f(x) = g(x)$ , por paridade ( $x = -\alpha$ ). E como  $f(0) = g(0) = 1$ , temos que:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -\alpha, 0, \alpha.$$

**Obs.:** Com análise numérica, pode-se estimar  $\alpha \approx 3,08$ .

**Resposta correta: (D)**

#### 11ª QUESTÃO

Seja um triângulo ABC com lados a, b e c opostos aos ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , respectivamente. Os lados a, b e c formam uma progressão aritmética nesta ordem. Determine a relação correta entre as funções trigonométricas dos ângulos dos vértices desse triângulo.

- (A)  $2\text{sen}(\hat{A} + \hat{C}) = \text{sen}(\hat{A}) + \text{sen}(\hat{C})$
- (B)  $2\text{cos}(\hat{A} + \hat{C}) = \text{cos}(\hat{A}) + \text{cos}(\hat{C})$
- (C)  $2\text{sen}(\hat{A} - \hat{C}) = \text{sen}(\hat{A}) - \text{sen}(\hat{C})$
- (D)  $2\text{cos}(\hat{A} - \hat{C}) = \text{cos}(\hat{A}) - \text{cos}(\hat{C})$
- (E)  $2\text{cos}(\hat{A} + \hat{C}) = \text{sen}(\hat{A}) + \text{sen}(\hat{C})$

#### **Comenta**

### TRIGONOMETRIA

Os lados em P.A. dão  $2b = a + c$ . Pela lei dos senos,

$$2 \cdot 2R\text{sen}\hat{B} = 2R\text{sen}\hat{A} + 2R\text{sen}\hat{C} \Rightarrow 2\text{sen}(\hat{A} + \hat{C}) = \text{sen}\hat{A} + \text{sen}\hat{C}.$$

**Resposta correta: (A)**

## 12ª QUESTÃO

Uma hipérbole equilátera de eixo igual a 4, com centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados e focos no eixo das abscissas sofre uma rotação de  $45^\circ$  no sentido anti-horário em torno da origem. A equação dessa hipérbole após a rotação é:

- (A)  $xy = 2$
- (B)  $x^2 + xy - y^2 = 4$
- (C)  $x^2 - y^2 = 2$
- (D)  $xy = -2$
- (E)  $x^2 - y^2 = -2$

 **Comenta**

### GEOMETRIA ANALÍTICA

Temos  $2a = 2b = 4 \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ , pois é horizontal. Os eixos sofrem rotação de  $45^\circ$ .

Substituindo  $x \leftarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$ ,  $y \leftarrow \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}$ , obtemos:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4 \Rightarrow 2xy = 4 \Rightarrow xy = 2$$

**Resposta correta: (A)**

## 13ª QUESTÃO

Em um setor circular de  $45^\circ$ , limitado pelos raios  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  iguais a  $R$ , inscreve-se um quadrado  $MNPQ$ , onde  $\overline{MN}$  está apoiado em  $\overline{OA}$  e o ponto  $Q$  sobre o raio  $\overline{OB}$ . Então, o perímetro do quadrado é:

- (A)  $4R$
- (B)  $2R$
- (C)  $2R\sqrt{2}$
- (D)  $4R\sqrt{5}$
- (E)  $4R\frac{\sqrt{5}}{5}$

**GEOMETRIA PLANA**

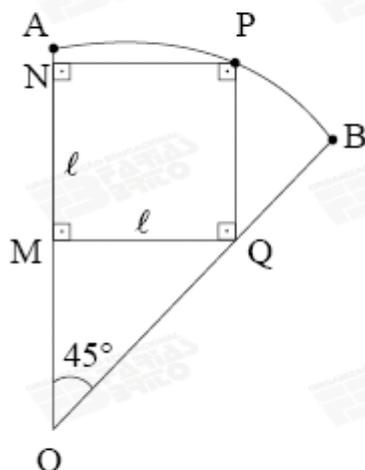


Fig.1

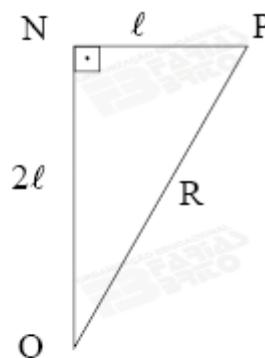


Fig.2

Seja  $l$  o lado do quadrado. Pela figura 1, temos que  $\triangle OMQ$  é retângulo isósceles, onde  $OM = l$ . Na figura 2, temos o  $\triangle ONP$  retângulo em N, com  $ON = OM + MN = l + l = 2l$ ,  $NM = l$  e  $OP = R$  (P está no círculo).

Daí, por Pitágoras,  $(2l)^2 + l^2 = R^2 \Rightarrow 5l^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{\frac{R^2}{5}} = R \frac{\sqrt{5}}{5}}$ .

Portanto, o perímetro do quadrado é  $4l = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$ .

**Resposta correta: (E)**

**14ª QUESTÃO**

Considere as afirmações abaixo:

- I) se três pontos são colineares, então eles são coplanares;
- II) se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;
- III) se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam 6 (seis) planos;
- IV) duas retas não paralelas determinam um plano;
- V) se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações:

- (A) apenas uma é verdadeira;
- (B) apenas duas são verdadeiras;
- (C) apenas três são verdadeiras;
- (D) apenas quatro são verdadeiras;
- (E) todas são verdadeiras.

 **Comenta**

## GEOMETRIA ESPACIAL

- I. (V) Toda reta está contida em um plano.  
 II. (F) Essa reta pode ser ortogonal (por exemplo) ao plano.  
 III. (F) São  $\binom{4}{3} = 4$  planos determinados.  
 IV. (F) Essas retas podem ser reversas e não há plano que as contenha.  
 V. (V) Essa reta em comum é a aresta do diedro formado por esses 2 planos.

**Resposta correta: (B)**

### 15ª QUESTÃO

Em um tetraedro  $ABCD$ , os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ACB}$  são idênticos e a aresta  $AD$  é ortogonal à  $BC$ . A área do  $\triangle ABC$  é igual à área do  $\triangle ACD$ , e o ângulo  $\widehat{MAD}$  é igual ao ângulo  $\widehat{MDA}$ , onde  $M$  é ponto médio de  $BC$ . Calcule a área total do tetraedro  $ABCD$ , em  $\text{cm}^2$ , sabendo que  $BC = 2\text{cm}$ , e que o ângulo  $\widehat{BAC}$  é igual a  $30^\circ$ .

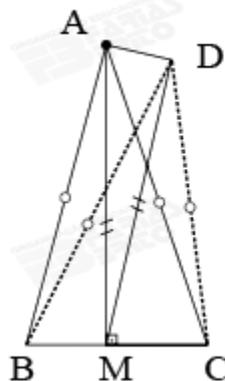
- (A)  $(2 - \sqrt{3})$   
 (B)  $(2 + \sqrt{3})$   
 (C)  $4(2 - \sqrt{3})$   
 (D)  $4(2 + \sqrt{3})$   
 (E) 4

 **Comenta**

## GEOMETRIA ESPACIAL

Inicialmente, note que

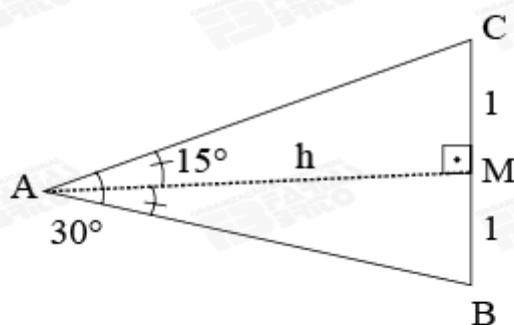
- $\widehat{MAD} = \widehat{MDA} \Rightarrow \boxed{MA = MD}$
- $AD \perp BC \Rightarrow DB = DC \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DBC$ , visto que ambos são triângulos isósceles com base e altura congruentes. Assim,  $AB = BC = AC = CD = \ell$  (\*)



- $\text{Área}(\Delta ABC) = \text{Área}(\Delta ADC) \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \sin(\widehat{ACD})$   
 $\Rightarrow \frac{\ell^2}{2} \cdot \sin(\widehat{BAC}) = \frac{\ell^2}{2} \cdot \sin(\widehat{ACD}) \Rightarrow \sin(\widehat{BAC}) = \sin(\widehat{ACD}) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACD}$  (ambos são ângulos agudos)  $\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta CDA$  (LAL)  
 e, por simetria (de  $AD \perp BC$ ),  $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ .

Assim,  $\Delta ABC \equiv \Delta ABD \equiv \Delta ACD \equiv \Delta DBC$ , e a área total do tetraedro ABCD é 4 vezes a área do  $\Delta ABC$ , cuja base é  $BC = 2$  cm e altura tal que

$$h = AM = \frac{CM}{\text{tg}15^\circ} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \text{Área}(\Delta ABC) = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{2} = 2 + \sqrt{3}$$



Portanto, a área total do tetraedro é  $4(2 + \sqrt{3})$  cm<sup>2</sup>.

Cálculos Auxiliares:

$$(*) : \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \text{tg}15^\circ}{1 - \text{tg}^2 15^\circ} \Rightarrow \text{tg}^2 15^\circ + 2\sqrt{3} \text{tg}15^\circ - 1 = 0 \Rightarrow \text{tg}15^\circ = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{tg}15^\circ = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{16}}{2}, \text{ e como } \text{tg}15^\circ > 0, \text{ tg}15^\circ = \frac{-2\sqrt{3} + 4}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

**Resposta correta: (D)**

## Física

## 16ª QUESTÃO

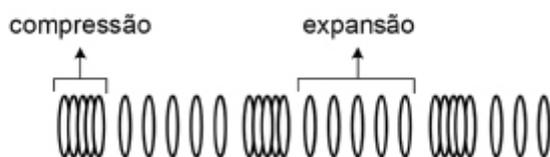


Figura 1

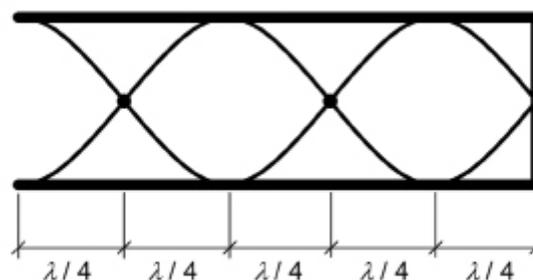


Figura 2

Considerando as Figuras 1 e 2 acima e, com relação às ondas sonoras em tubos, avalie as afirmações a seguir:

**Afirmção I.** as ondas sonoras são ondas mecânicas, longitudinais, que necessitam de um meio material para se propagarem, como representado na Figura 1.

**Afirmção II.** uma onda sonora propagando-se em um tubo sonoro movimenta as partículas do ar no seu interior na direção transversal, como representado na Figura 2.

**Afirmção III.** os tubos sonoros com uma extremidade fechada, como representado na Figura 2, podem estabelecer todos os harmônicos da frequência fundamental.

É correto o que se afirma em:

- (A) I, apenas.
- (B) II, apenas.
- (C) I e II, apenas.
- (D) II e III apenas.
- (E) I e III, apenas.

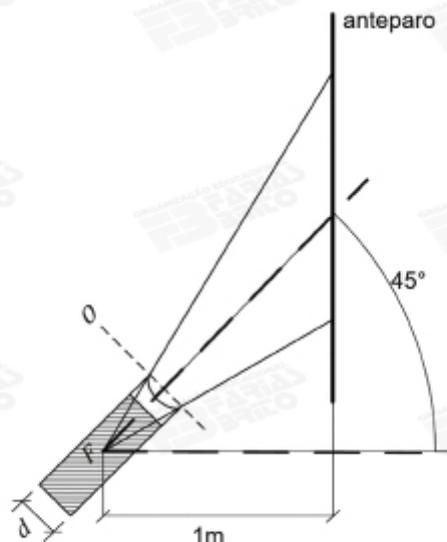


## ACÚSTICA

1. **Verdadeiro:** as ondas sonoras são mecânicas e longitudinais. Logo, precisam de um meio material para se propagar.
2. **Falso:** o movimento das partículas, durante a passagem de uma onda sonora, é ao longo da direção de propagação da onda. A figura 2 é apenas uma representação para facilitar o modelo.
3. **Falso:** só formam harmônicos de ordem ímpar.

**Resposta correta: (A)**

## 17ª QUESTÃO



Uma lanterna cilíndrica muito potente possui uma lente divergente em sua extremidade. Ela projeta uma luz sobre um anteparo vertical. O eixo central da lanterna e o eixo principal da lente estão alinhados e formam um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal. A lâmpada da lanterna gera raios de luz paralelos, que encontram a lente divergente, formando um feixe cônico de luz na sua saída. O centro óptico da lente  $O$  está, aproximadamente, alinhado com as bordas frontais da lanterna. A distância horizontal entre o foco  $F$  da lente e o anteparo é de 1 m. Sabendo disto, pode-se observar que o contorno da luz projetada pela lanterna no anteparo forma uma seção plana cônica. Diante do exposto, o comprimento do semieixo maior do contorno dessa seção, em metros, é:

Dados:

- a lente é do tipo plano-côncava;
- a face côncava está na parte mais externa da lanterna;
- diâmetro da lanterna:  $d = 10$  cm;
- índice de refração do meio externo ( $n_r$ ): 1;
- índice de refração da lente: 1,5;
- raio de curvatura da face côncava:  $2,5\sqrt{3}$  cm.

- (A)  $3\sqrt{2}$   
 (B)  $(\sqrt{3} - 1)$   
 (C)  $(\sqrt{3} + 1)$   
 (D)  $\sqrt{3}$   
 (E)  $2\sqrt{3}$

## ÓPTICA – LENTES

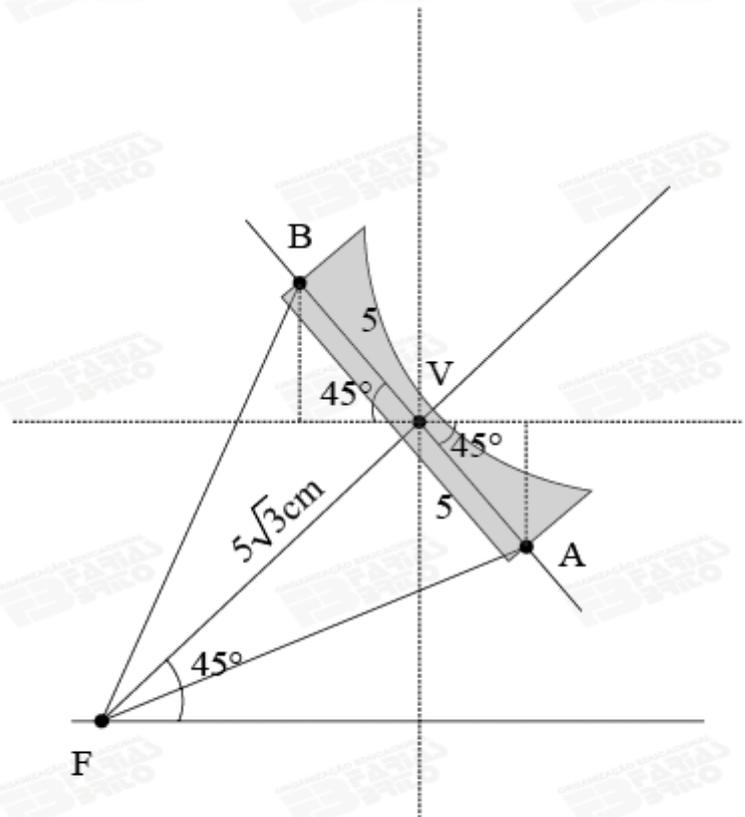
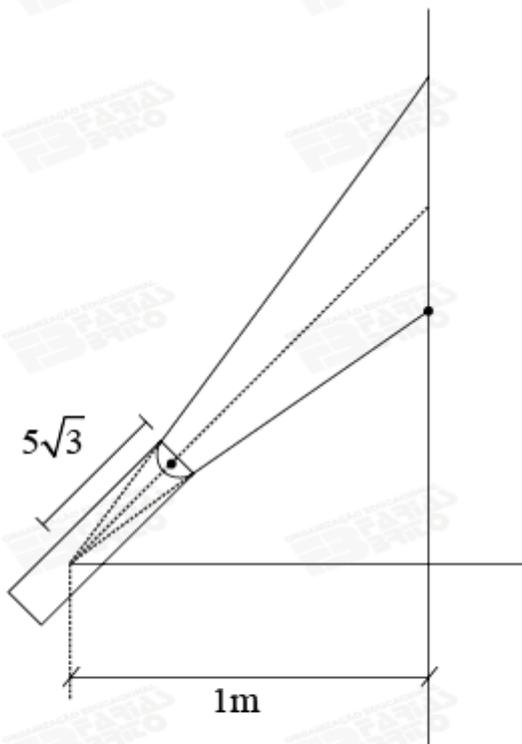
I. Para o foco da lente:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{N_2}{N_1} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{1,5}{1} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{-2,5\sqrt{3}} \right)$$

$$f = \frac{-2,5\sqrt{3}}{0,5} = -5\sqrt{3} \text{ cm}$$

II.



III. As coordenadas dos pontos A e B, em relação ao foco.

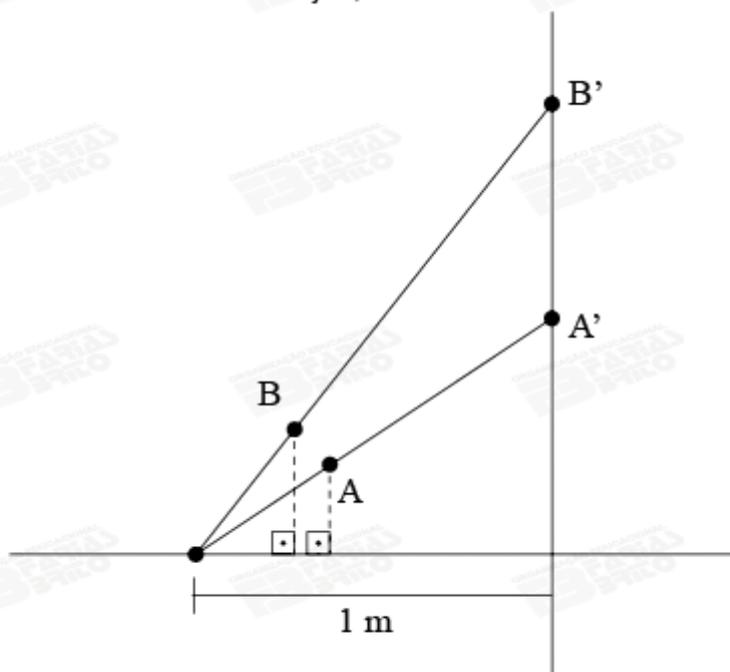
$$A_x = 5\sqrt{3} \cdot \cos 45 + 5 \cdot \cos 45 = \frac{5\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$$

$$A_y = 5\sqrt{3} \cdot \sin 45 - 5 \cdot \sin 45 = \frac{5\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) \text{ cm}$$

$$B_x = 5\sqrt{3} \cdot \cos 45 - 5 \cdot \cos 45 = \frac{5\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) \text{ cm}$$

$$B_y = 5\sqrt{3} \cdot \sin 45 + 5 \cdot \sin 45 = \frac{5\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$$

IV. Fazendo as semelhanças, temos:



\* As coordenadas  $A'_x$  e  $B'_x$  são iguais a 1m.

$$\frac{A_x}{A'_x} = \frac{A_y}{A'_y}$$

$$\frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)\text{cm}}{1} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\text{cm}}{A'_y}$$

$$A'_y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$$

$$\frac{B_x}{B'_x} = \frac{B_y}{B'_y}$$

$$\frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\text{cm}}{1\text{ m}} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)\text{cm}}{B'_y}$$

$$B'_y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$$

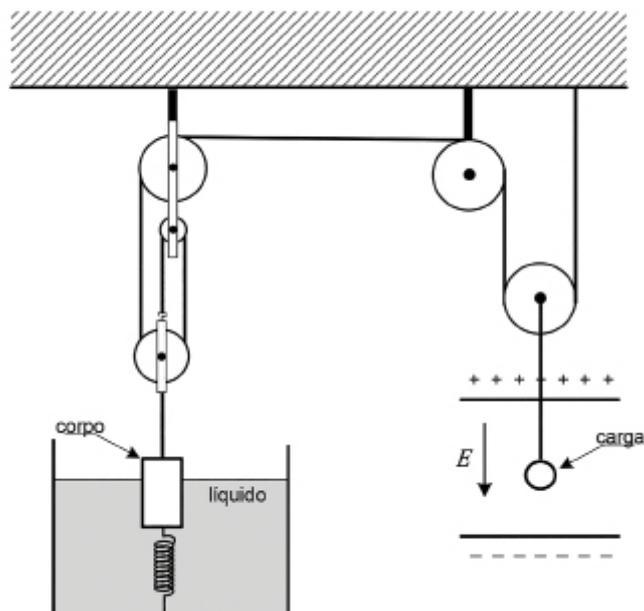
V. O comprimento do semieixo maior é

$$C = \frac{B'_y - A'_y}{2}$$

$$C = \frac{B'_y - A'_y}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4} - \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \frac{\cancel{x} + 2\sqrt{3} + \cancel{x} - \cancel{x} + 2\sqrt{3} - \cancel{x}}{4} = \sqrt{3}\text{ m}$$

Resposta correta: (D)

18ª QUESTÃO



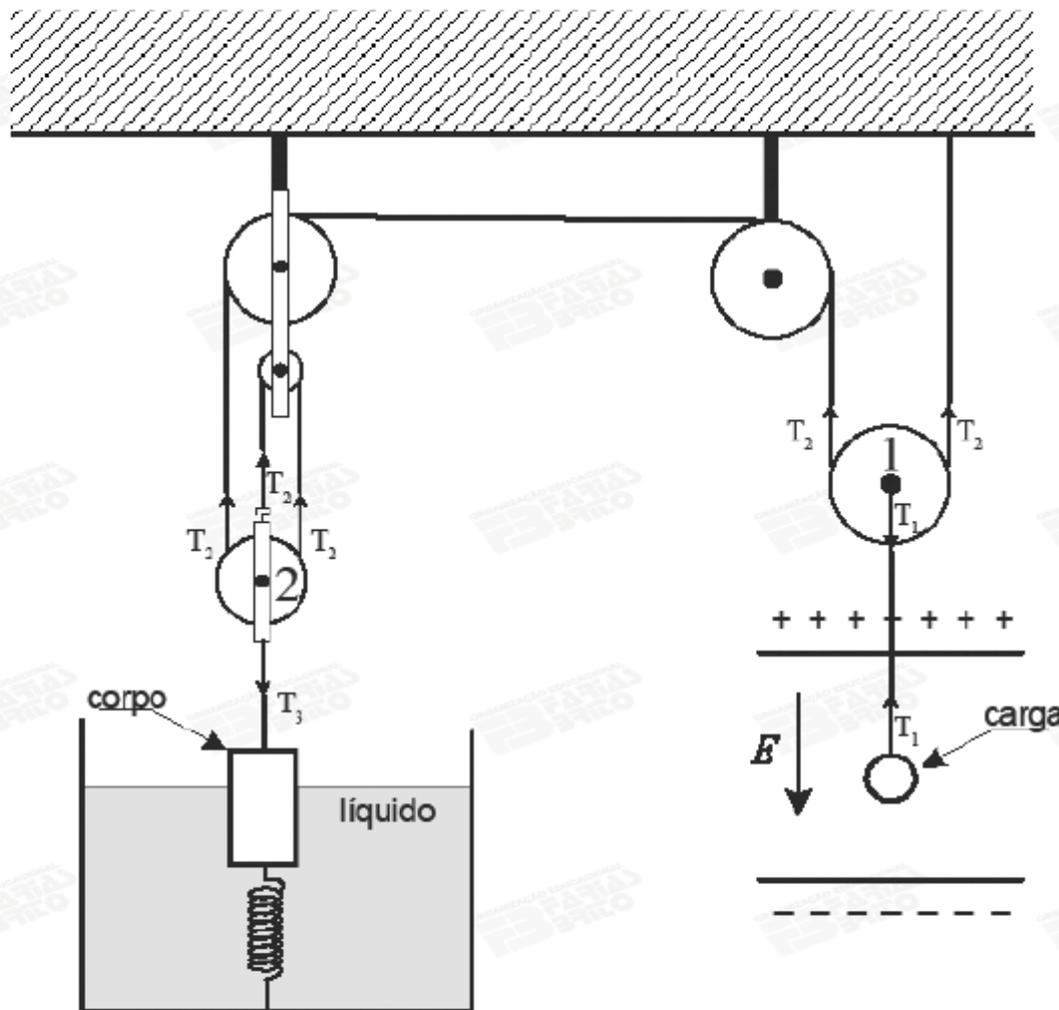
Um corpo encontra-se com  $\frac{2}{3}$  de seu volume submerso. Uma de suas extremidades está presa por uma corda a um conjunto de roldanas que suspende uma carga puntiforme submetida a um campo elétrico uniforme. A outra extremidade está presa a uma mola distendida que está fixa no fundo do recipiente. Este sistema se encontra em equilíbrio e sua configuração é mostrada na figura acima. Desprezando os efeitos de borda no campo elétrico, a deformação da mola na condição de equilíbrio é:

Dados:

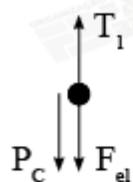
- a corda e as roldanas são ideais;
- aceleração da gravidade:  $g$ ;
- massa específica do fluido:  $\rho$ ;
- massa específica do corpo:  $2\rho$ ;
- constante elástica da mola:  $k$ ;
- volume do corpo:  $V$ ;
- intensidade do campo elétrico uniforme:  $E$ ;
- massa da carga elétrica:  $m$ ; e
- carga elétrica:  $+q$ .

- (A)  $\frac{g}{k} \left( \frac{m}{2} - \frac{4\rho V}{3} \right) + \frac{qE}{2k}$
- (B)  $\frac{g}{k} \left( \frac{3m}{2} - \frac{4\rho V}{3} \right) + \frac{3qE}{2k}$
- (C)  $\frac{g}{3k} (m - 4\rho V + qE) + \frac{qE}{k}$
- (D)  $\frac{g}{k} \left( \frac{mg}{2} - \frac{4\rho V}{3} \right) + \frac{qE}{2k}$
- (E)  $\frac{mg}{k} \left( \frac{qE}{d} - \frac{2\rho V}{3} \right)$

**ESTÁTICA / ELETROSTÁTICA**



Para a carga:



$$T_1 = mg + qE$$

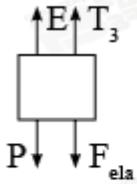
Para a roldana ①

$$2T_2 = T_1 \rightarrow T_2 = \frac{mg + qE}{2}$$

Para a roldana ②

$$T_3 = 3T_2 \rightarrow T_3 = \frac{3}{2} (qE + mg)$$

Para o corpo.



$$E + T_3 = P + F_{\text{ela}}$$

$$\rho g \frac{3}{2}V + \frac{3}{2}(qE + mg) = 2\rho gV + Kx$$

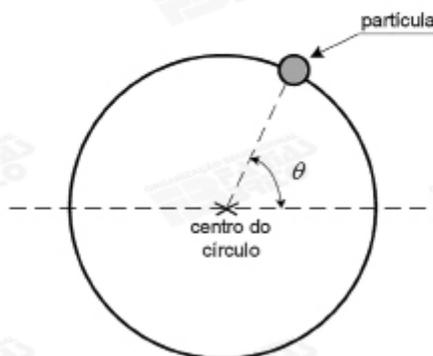
$$Kx = \frac{2}{3}\rho gV - 2\rho gV + \frac{3}{2}qE + \frac{3}{2}mg$$

$$Kx = -\frac{4}{3}\rho gV + \frac{3}{2}mg + \frac{3}{2}qE$$

$$x = \frac{g}{K} \left( \frac{3}{2}m - \frac{4}{3}\rho V \right) + \frac{3}{2} \frac{qE}{K}$$

Resposta correta: (B)

19ª QUESTÃO

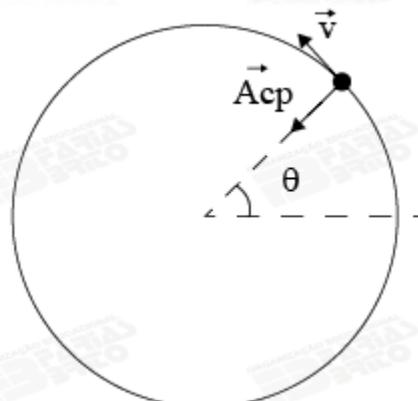


Uma partícula desloca-se solidária a um trilho circular com 0,5 m de raio. Sabe-se que o ângulo  $\theta$ , indicado na figura, segue a equação  $\theta = t^2$ , onde  $t$  é o tempo em segundos e  $\theta$  é o ângulo em radianos. O módulo do vetor aceleração da partícula, em  $t = 1$  s, é:

- (A)  $\sqrt{5}$
- (B)  $\sqrt{2}$
- (C) 1
- (D)  $2\sqrt{5}$
- (E) 2



M.C.U.V.



$$R = 0,5 \text{ m}$$

$$\theta = t^2$$

I. Cálculo da aceleração angular.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2t \rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 2 \text{ rad/s}^2$$

II. Módulo da velocidade  $\vec{V}$

$$V = at, \text{ onde } a = \alpha R \Rightarrow a = 2 \times 0,5 \text{ m/s}^2 \\ a = 1 \text{ m/s}^2$$

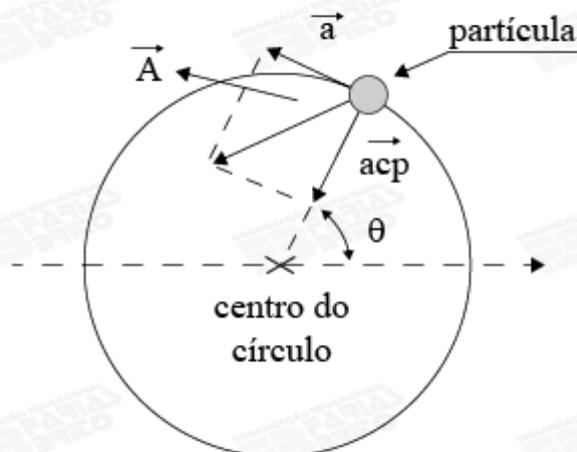
$$\text{Daí: } V = 1 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ s} \rightarrow V = 1 \text{ m/s}$$

III. Módulo da aceleração centrípeta.

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{V^2}{R} \Rightarrow |\vec{a}_{cp}| = \frac{(1 \text{ m/s})^2}{0,5 \text{ m}}$$

$$|\vec{a}_{cp}| = 2 \text{ m/s}^2$$

IV. Aceleração da partícula  $\vec{A}$

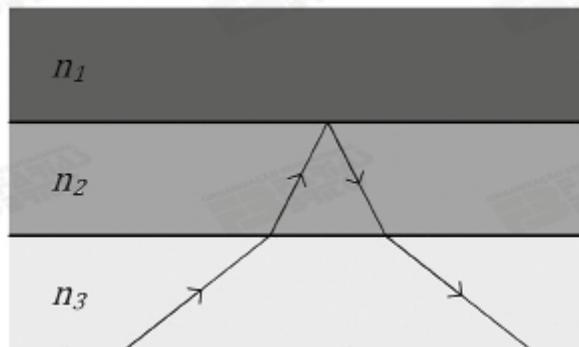


$$|\vec{A}| = \sqrt{1+4} \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{5} \text{ m/s}^2$$

Resposta correta: (A)

## 20ª QUESTÃO



A figura acima mostra três meios transparentes, de índices de refração  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ , e o percurso de um raio luminoso. Observando a figura, é possível concluir que:

- (A)  $n_2 < n_3 < n_1$
- (B)  $n_1 < n_2 < n_3$
- (C)  $n_3 < n_1 < n_2$
- (D)  $n_1 < n_3 < n_2$
- (E)  $n_2 < n_1 < n_3$

**Comenta**

## ÓPTICA GEOMÉTRICA

Analisando a figura, podemos concluir que:

- i) Ao incidir do meio 3 para o meio 2, o raio se aproxima da normal o que nos leva a garantir que o meio 2 é mais refringente que o meio 3.
- ii) Ocorre reflexão total ao incidir do meio 2 para o meio 1.

Logo,

$$n_2 > n_3 \text{ e } n_2 > n_1$$

$$n_3 < n_1$$

- iii) Como temos um sistema de faces paralelas, podemos escrever:

$$n_3 \cdot \text{sen}\theta_3 = n_1 \cdot \text{sen } 90^\circ$$

$$1 > \text{sen}\theta_3 = \frac{n_1}{n_3} \therefore n_3 > n_1$$

**Resposta FB: (D)**

**Resposta IME: (C)**

21ª QUESTÃO

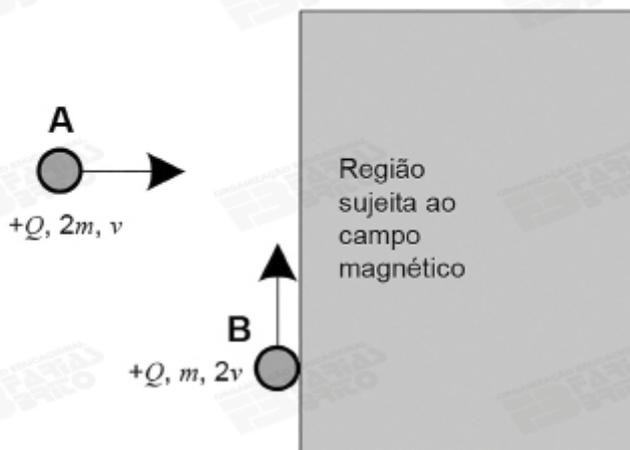


Figura 1

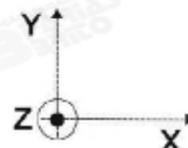


Figura 2

Duas partículas A e B, ambas com carga positiva  $+Q$  e massas  $2m$  e  $m$ , respectivamente, viajam, em velocidades constantes  $v$  e  $2v$  e nas direções e sentidos mostrados na Figura 1, até se chocarem e ficarem grudadas no instante em que penetram numa região sujeita a um campo magnético constante  $(0, 0, B)$ , sendo  $B$  uma constante positiva. O comprimento da trajetória percorrida pelo conjunto A+B dentro da região sujeita ao campo magnético é:

Observações:

- despreze o efeito gravitacional;
- antes do choque, a partícula B viaja tangenciando a região sujeita ao campo magnético;
- o sistema de eixo adotado é o mostrado na Figura 2; e
- despreze a interação elétrica entre as partículas A e B.

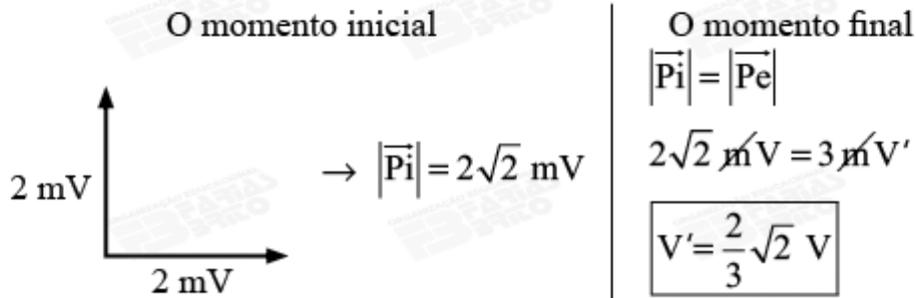
- (A)  $\frac{3\sqrt{2}\pi m v}{2QB}$
- (B)  $\frac{\sqrt{2}\pi m v}{QB}$
- (C)  $\frac{3\sqrt{2}\pi m v}{QB}$
- (D)  $\frac{3\pi m v}{2QB}$
- (E)  $\frac{\sqrt{2}\pi m v}{2QB}$



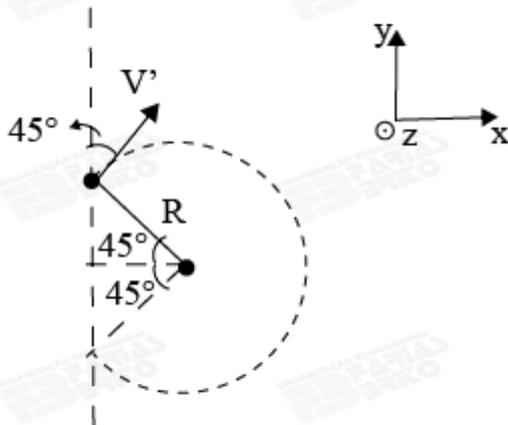
## MAGNETISMO / COLISÕES

Para a colisão, temos:

A conservação do momento.



Para o movimento, temos:



A força centrípeta:

$$F_{cp} = F_{ma}$$

$$\frac{3mV'^2}{R} = 2B\gamma'Q$$

$$R = \frac{3mv'}{2QB}$$

Substituindo a velocidade  $v'$ .

$$R = \frac{3m}{2QB} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} \text{ V} \rightarrow R = \frac{\sqrt{2} \text{ mV}}{QB}$$

O ângulo correspondente será  $270^\circ$  ou  $\frac{3\pi}{2}$ .

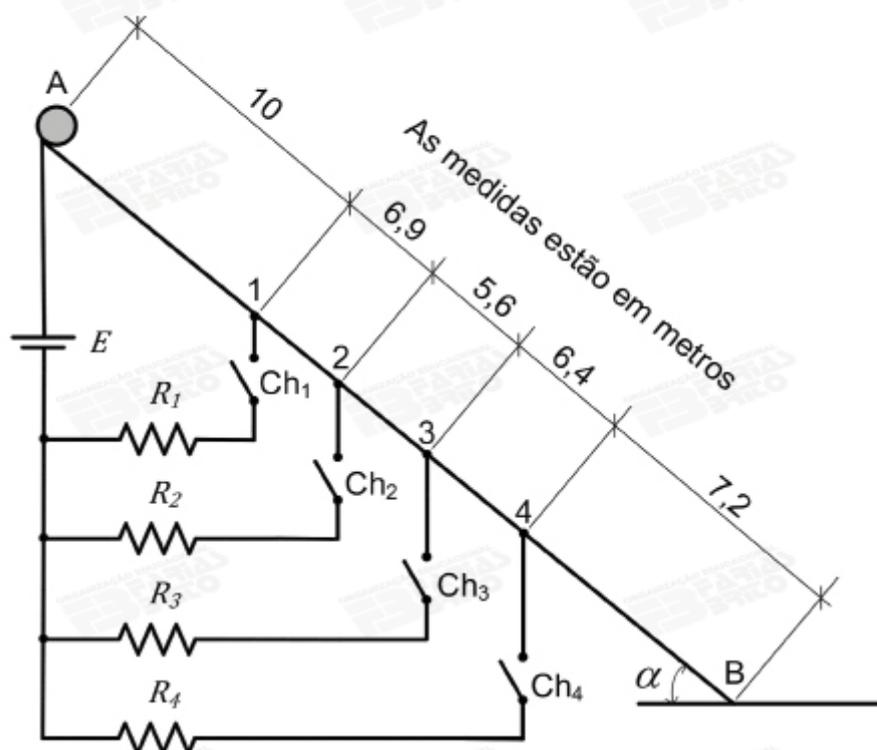
O comprimento será:

$$C = \theta \cdot R$$

$$C = \frac{3}{2}\pi \cdot R = \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{\sqrt{2} \text{ mV}}{QB} \rightarrow \frac{3\sqrt{2} \text{ mV}}{2 QB}$$

**Resposta correta: (A)**

22ª QUESTÃO



A figura mostra um circuito montado sob um plano inclinado feito de material condutor ideal, sem atrito de ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Um corpo é liberado do ponto A e, à medida que passa pelos sensores localizados nos pontos 1, 2, 3 e 4, as chaves  $Ch_1$ ,  $Ch_2$ ,  $Ch_3$  e  $Ch_4$  são fechadas instantaneamente. Diante do exposto, a energia elétrica dissipada durante a descida do corpo até o ponto B, em joules, é:

Dados:

- $R_1 = 10 \Omega$ ;
- $R_2 = 10 \Omega$ ;
- $R_3 = 5 \Omega$ ;
- $R_4 = 2,5 \Omega$ ;
- $E = 10 \text{ V}$ ;
- $\alpha = 30^\circ$ ; e
- $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- (A) 6
- (B) 16
- (C) 32
- (D) 62
- (E) 120



## ELETRODINÂMICA E CINEMÁTICA

Temos que potência é dado por:  $P = \frac{U^2}{R}$

E energia elétrica dissipada por:  $E_d = P \cdot \Delta t$

Logo a energia elétrica dissipada durante a descida será:

$$E_{d(\text{total})} = P_1 \Delta t_{12} + P_2 \Delta t_{23} + P_3 \Delta t_{34} + P_4 \Delta t_{4B}$$

I. Cálculo das potências:

$$P_1 = \frac{E^2}{R_1} = \frac{10^2}{10} = \frac{10\cancel{\theta}}{1\cancel{\theta}} \Rightarrow \boxed{P_1 = 10W}$$

$$P_2 = \frac{E^2}{R_{12}}, \text{ mas } \frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10^5} = \frac{1}{5} \rightarrow R_{12} = 5\Omega$$

$$P_2 = \frac{10}{5} = \frac{10\cancel{\theta}}{1\cancel{\theta}} \Rightarrow \boxed{P_2 = 20W}$$

$$P_3 = \frac{E^2}{R_{123}}, \text{ mas } \frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{R_{123}} = \frac{4}{10^5} \Rightarrow R_{123} = \frac{5}{2}\Omega$$

$$P_3 = \frac{10^2}{\frac{5}{2}} = 10\cancel{\theta} \cdot \frac{2}{1\cancel{\theta}} \Rightarrow \boxed{P_3 = 40W}$$

$$P_4 = \frac{E^2}{R_{1234}}, \text{ mas } \frac{1}{R_{1234}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \rightarrow \frac{1}{R_{1234}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2,5} = R_{1234} = \frac{5}{4}\Omega$$

$$P_4 = \frac{10}{\frac{5}{4}} = 10\cancel{\theta} \cdot \frac{4}{1\cancel{\theta}} \Rightarrow \boxed{P_4 = 80W}$$

II. Cálculo dos tempos de descida:

$$F = mg \sin \alpha = m \cdot a \Rightarrow a = g \cdot \sin \alpha \text{ e } d = \cancel{v_0 t} + \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow d = \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot d}{g \cdot \sin \alpha}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{g \cdot \sin \alpha}} \quad \text{como } g = 10 \text{ m/s}^2 \text{ e } \alpha = 30^\circ$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{10 \cdot 0,5}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{5}}$$

$$\Delta t_{A1} = \sqrt{\frac{2 \cdot d_{A1}}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{5}} \Rightarrow \Delta t_{A1} = 2,0 \text{ s}$$

$$\Delta t_{A2} = \sqrt{\frac{2 \cdot d_{A2}}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16,9}{5}} \Rightarrow \Delta t_{A2} = 2,6 \text{ s}$$

$$\Delta t_{A3} = \sqrt{\frac{2 \cdot d_{A3}}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 22,5}{5}} \Rightarrow \Delta t_{A3} = 3,0 \text{ s}$$

$$\Delta t_{A4} = \sqrt{\frac{2 \cdot d_{A4}}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 28,9}{5}} \Rightarrow \Delta t_{A4} = 3,4 \text{ s}$$

$$\Delta t_{AB} = \sqrt{\frac{2 \cdot d_{AB}}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 36,1}{5}} \Rightarrow \Delta t_{AB} = 3,8 \text{ s}$$

### III. Cálculo dos intervalos de tempo:

$$\Delta t_{12} = \Delta t_{A2} - \Delta t_{A1} = 2,6 - 2,0 \Rightarrow \Delta t_{12} = 0,6 \text{ s}$$

$$\Delta t_{23} = \Delta t_{A3} - \Delta t_{A2} = 3,0 - 2,6 \Rightarrow \Delta t_{23} = 0,4 \text{ s}$$

$$\Delta t_{34} = \Delta t_{A4} - \Delta t_{A3} = 3,4 - 3,0 \Rightarrow \Delta t_{34} = 0,4 \text{ s}$$

$$\Delta t_{4B} = \Delta t_{AB} - \Delta t_{A4} = 3,8 - 3,4 \Rightarrow \Delta t_{4B} = 0,4 \text{ s}$$

### IV. Cálculo da energia elétrica dissipada

$$E_{d(\text{total})} = P_1 \cdot \Delta t_{12} + P_2 \cdot \Delta t_{23} + P_3 \cdot \Delta t_{34} + P_4 \cdot \Delta t_{4B}$$

$$E_{d(\text{total})} = 10 \cdot 0,6 + 20 \cdot 0,4 + 40 \cdot 0,4 + 80 \cdot 0,4$$

$$E_{d(\text{total})} = 6 + 8 + 16 + 32 \Rightarrow E_{d(\text{total})} = 62 \text{ J}$$

**Resposta correta: (D)**

### 23ª QUESTÃO

Considere as seguintes grandezas e suas dimensionais:

Calor específico –  $[c]$

Coefficiente de dilatação térmica –  $[\alpha]$

Constante eletrostática –  $[k]$

Permeabilidade magnética –  $[\mu]$

A alternativa que expressa uma grandeza adimensional é:

(A)  $[c][\alpha]^{-1}[k][\mu]$

(B)  $[c][\alpha]^{-1}[k]^{-1}[\mu]$

(C)  $[c][\alpha]^{-1}[k][\mu]^{-1}$

(D)  $[c][\alpha]^{-2}[k][\mu]^{-2}$

(E)  $[c][\alpha]^{-2}[k]^{-1}[\mu]^{-2}$



## ANÁLISE DIMENSIONAL

Vamos determinar o dimensional de cada grandeza:

I. calor específico: (c)

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow c = \frac{\theta}{m \cdot \Delta\theta} \rightarrow [c] = \frac{[Q]}{[m][\Delta\theta]} = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}{M \cdot \theta} = L^2 T^{-2} \theta^{-1}$$

II. coeficiente de dilatação térmica: ( $\alpha$ )

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta \rightarrow \alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \cdot \Delta\theta} \rightarrow [\alpha] = \frac{[\Delta L]}{[L_0][\Delta\theta]} = \frac{L}{L \cdot \theta} = \theta^{-1}$$

III. constante eletrostática: (K)

$$F = \frac{KQq}{d^2} \rightarrow K = \frac{Fd^2}{Q \cdot q} \rightarrow [K] = \frac{[F][d]^2}{[Q] \cdot [q]} = \frac{MLT^{-2} \cdot L^2}{I^2 T^2} = ML^3 T^{-4} I^{-2}$$

IV. Permeabilidade magnética: ( $\mu_0$ )

$$F = B \cdot i \cdot L \rightarrow B = \frac{F}{i \cdot L} \rightarrow [B] = \frac{[F]}{[i] \cdot [L]} = \frac{MLT^{-2}}{IL} = MT^{-2} I^{-1}$$

e

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2R} \rightarrow \mu_0 = \frac{B \cdot 2R}{i} \rightarrow [\mu_0] = \frac{[B] \cdot [2R]}{[i]} = \frac{MT^{-2} \cdot I^{-1} \cdot L}{I} = MLT^{-2} I^{-2}$$

Logo, uma combinação que fornece uma grandeza adimensional:

$$[c]^a \cdot [\alpha]^b \cdot [K]^c \cdot [\mu]^d = 1$$

$$(L^2 T^{-2} \theta^{-1})^a (\theta^{-1})^b (ML^3 T^{-4} I^{-2})^c (MLT^{-2} I^{-2})^d = 1$$

$$L^{2a} T^{-2a} \theta^{-a} \theta^{-b} M^c L^{3c} T^{-4c} I^{-2c} M^d L^d T^{-2d} I^{-2d} = 1$$

$$L \Rightarrow 2a + 3c + d = 0$$

$$T \Rightarrow -2a - 4c - 2d = 0$$

$$\theta \Rightarrow -a - b = 0$$

$$M \Rightarrow c + d = 0$$

$$I \Rightarrow -2c - 2d = 0$$

Considerando (em virtude das opções)  $a = 1$

Logo:

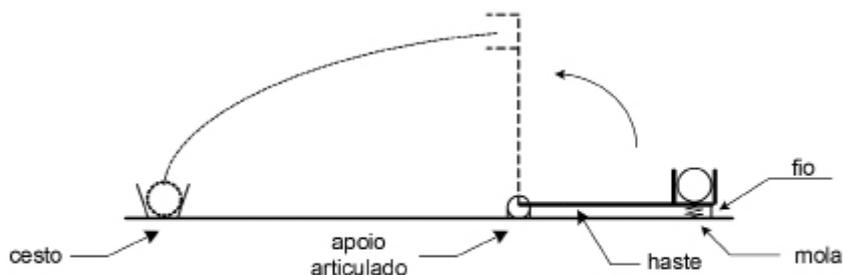
$$b = -1$$

$$c = -1$$

$$d = +1$$

**Resposta correta: (B)**

24ª QUESTÃO



A figura mostra uma haste de massa desprezível com um apoio articulado em uma extremidade. A outra extremidade possui um recipiente apoiado em uma mola e amarrado ao solo por um fio. A haste é mantida na posição horizontal e a mola comprimida. Uma bola é colocada nesse recipiente e, após o corte do fio, o sistema é liberado com distensão instantânea da mola.

A constante elástica da mola, em N/m, para que, quando a prancha estiver perpendicular ao solo, a bola seja lançada e acerte o cesto é:

Dados:

- comprimento da prancha: 1 m;
- distância do apoio ao cesto: 5 m;
- massa da bola: 200 g;
- deformação inicial da mola: 10 cm; e
- aceleração da gravidade: 10 m/s<sup>2</sup>.

Observação:

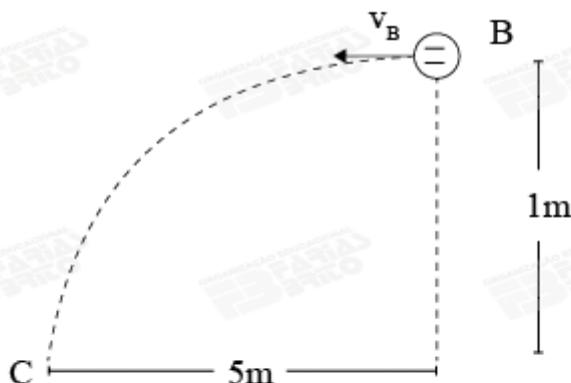
- despreze as dimensões da bola.

- (A) 400                      (B) 500                      (C) 2900                      (D) 3400                      (E) 12900



## ENERGIA MECÂNICA E LANÇAMENTOS

- Análise do lançamento horizontal BC



→ Movimento vertical:

$$h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow 1 = \frac{10}{2}t^2 \rightarrow \boxed{t = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ s}}$$

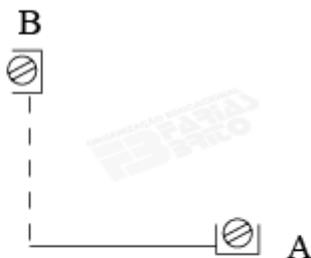
→ Movimento horizontal:

$$x = v_B t$$

$$5 = v_B \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$v_B = 5\sqrt{5} \text{ m/s}$$

• Trajeto AB:



Por conservação de energia de A para B:

$$\frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}mV_B^2 + mgh$$

$$K(10^{-1})^2 = 0,2 \cdot (5\sqrt{5})^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 1$$

$$k 10^{-2} = 25 + 4$$

$$K = 2900 \text{ N/m}$$

Resposta correta: (C)

25ª QUESTÃO

Um manômetro de reservatório é composto por dois tubos verticais comunicantes pelas respectivas bases e abertos em suas extremidades. Esse conjunto é preenchido parcialmente por um fluido e, como o dispositivo encontra-se no ar à pressão atmosférica padrão, o nível de fluido nos dois tubos é o mesmo. Em um dado momento, no tubo à esquerda, é adicionada uma pressão manométrica equivalente a 12 mm de coluna de água. Considerando que não haja vazamento no manômetro, a ascensão de fluido no tubo à direita, em mm, é igual a:

Dados:

- diâmetro do tubo à esquerda: 20 mm;
- diâmetro do tubo à direita: 10 mm; e
- densidade do fluido: 1,2.

(A) 20

(B) 40

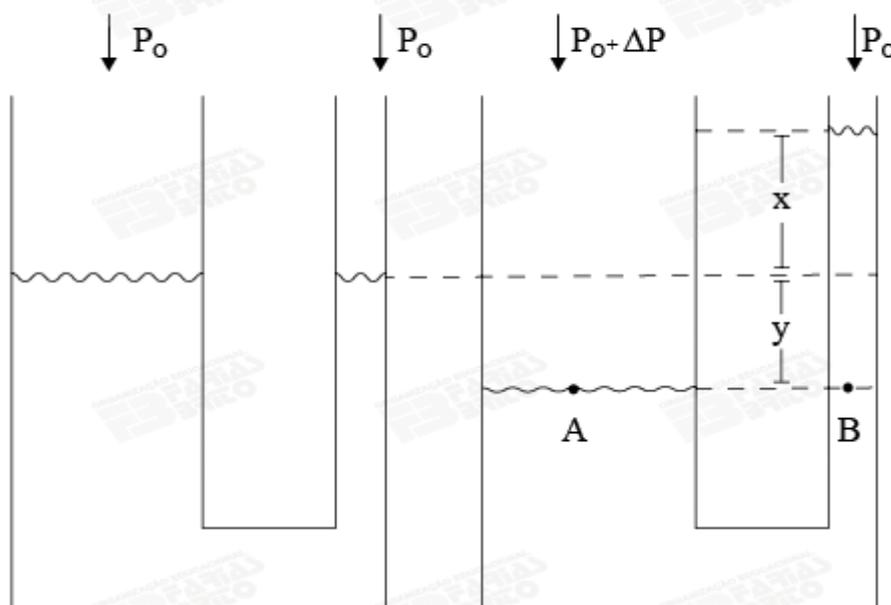
(C) 8

(D) 4

(E) 10



**HIDROSTÁTICA**



Igualdade das pressões:

$$\begin{aligned}
 P_A &= P_B \\
 P_0 + \Delta P &= P_0 + \mu_2 g(x + y) \\
 \mu_1 g h &= \mu_2 g(x + y) \\
 1 \cdot 12 &= 1,2(x + y) \\
 \boxed{x + y} &= \boxed{10}
 \end{aligned}$$

Por conservação de volume:

$$\begin{aligned}A_e y &= A_D x \\ \pi R_e^2 y &= \pi R_D^2 x \\ 10^2 \cdot y &= 5^2 x \\ x &= 4y\end{aligned}$$

$$\boxed{y = \frac{x}{4}}$$

Assim:

$$x + \frac{x}{4} = 10$$

$$\frac{5x}{4} = 10$$

$$\boxed{x = 8 \text{ mm}}$$

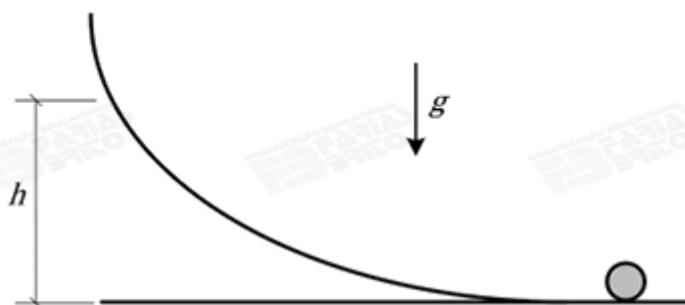
**Nota:** Na solução foi considerado que a densidade “1,2” era em relação à água, isto é:

$$\boxed{\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1,2}$$

Onde  $\mu_1 = 1 \text{ g/cm}^3$

**Resposta correta: (C)**

26ª QUESTÃO



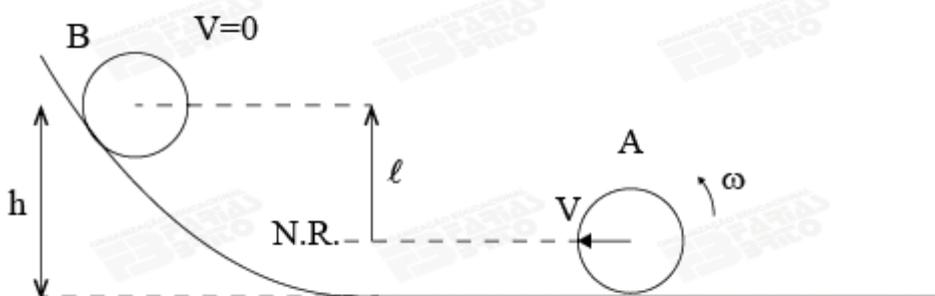
Um cilindro de raio  $R$  rola, sem deslizar, em velocidade angular  $\omega$ , sobre uma superfície plana horizontal até atingir uma rampa. Considerando também que o rolamento na rampa seja sem deslizamento e chamando de  $g$  a aceleração da gravidade, a altura máxima,  $h$ , que o eixo do cilindro alcança na rampa em relação à superfície plana é:

- (A)  $R + \frac{\omega^2 R^2}{g}$
- (B)  $R + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$
- (C)  $2R + \frac{\omega^2 R^2}{g}$
- (D)  $\frac{\omega^2 R^2}{g}$
- (E)  $\frac{\omega^2 R^2}{2g}$

**Comenta**

**DINÂMICA DA ROTAÇÃO/CONSERVAÇÃO DA ENERGIA**

Como o rolamento é perfeito, o sistema é conservativo, então podemos considerar  $E_M = cte$ :



Chamando de  $\ell$  a elevação do C.M.:

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mg\ell$$

**Obs.:** Como a questão não informa se o cilindro é oco (casca) ou maciço, a resposta fica dependendo dessa informação, entretanto, para haver uma opção correta, devemos supor que o cilindro é oco, onde  $I = mR^2$ .

Logo:

$$\frac{m(\omega R)^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = mg\ell$$

$$\ell = \frac{\omega^2 R^2}{g}$$

Assim,  $h = R + \ell$

$$h = R + \frac{\omega^2 R^2}{g}$$

**Resposta correta: (A)**

### 27ª QUESTÃO

Duas pessoas executam um experimento para medir o raio da Terra a partir da observação do pôr do Sol. No momento em que uma pessoa, deitada, observa o pôr do Sol a partir do nível do mar, uma outra pessoa, de pé, inicia a contagem do tempo até que ela observe o pôr do Sol a partir da altura dos seus olhos. Sabendo-se que o intervalo de tempo entre as duas observações é  $\Delta t$ , o raio da Terra obtido por meio desse experimento é

Observações:

- considere a terra uma esfera perfeita;
- considere o eixo de rotação do planeta perpendicular ao plano de translação;
- o experimento foi executado na linha do Equador; e
- desconsidere o movimento de translação da Terra.

Dados:

- período de rotação da Terra:  $T$ ; e
- distância vertical entre os olhos do segundo observador e o nível do mar:  $h$ .

(A)  $\frac{h}{1 - \cos\left(2\pi\frac{\Delta t}{T}\right)}$

(B)  $\frac{h}{\sec\left(2\pi\frac{\Delta t}{T}\right) - 1}$

(C)  $h \cotg\left(2\pi\frac{\Delta t}{T}\right)$

(D)  $h \operatorname{cosec}\left(2\pi\frac{\Delta t}{T}\right)$

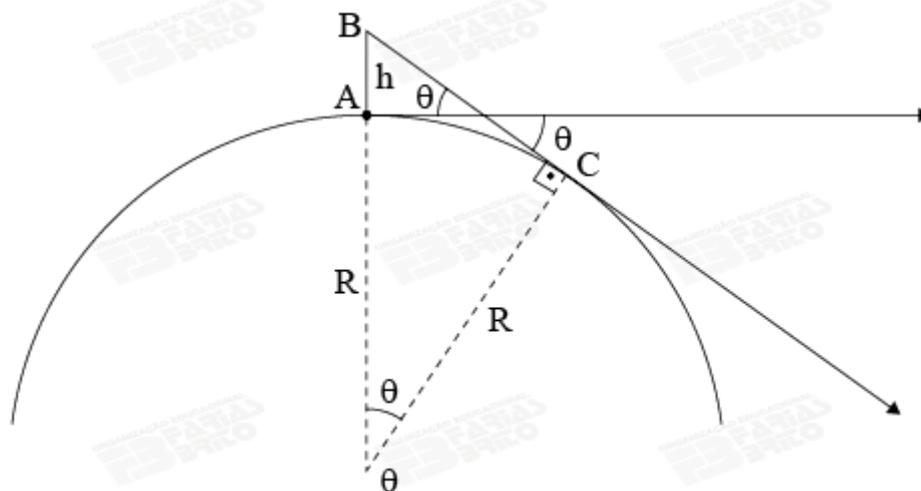
(E)  $\frac{h \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\Delta t}{T}\right)}{1 - \cos\left(2\pi\frac{\Delta t}{T}\right)}$



## FÍSICA FENOMENOLÓGICA

A – pessoa deitada

B – pessoa em pé



Fazendo a proporção para achar o ângulo “ $\theta$ ”.

$$\frac{\theta - \Delta t}{2\pi - T} \rightarrow \theta = \frac{2\pi\Delta t}{T}$$

No triângulo BCO, temos:

$$\cos \theta = \frac{R}{R+h} \rightarrow R \cos \theta + h \cos \theta = R.$$

$$R(1 - \cos \theta) = h \cos \theta$$

$$R = \frac{h \cos \theta}{1 - \cos \theta} \rightarrow R = \frac{h}{\sec \theta - 1}$$

$$R = \frac{h}{\sec\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) - 1}$$

Resposta correta: (B)

28ª QUESTÃO

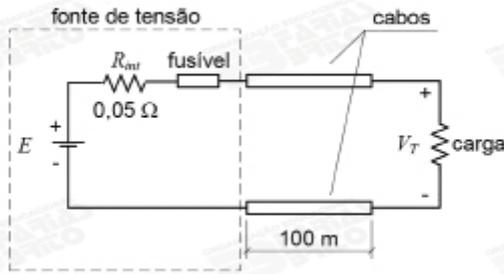


Figura 1

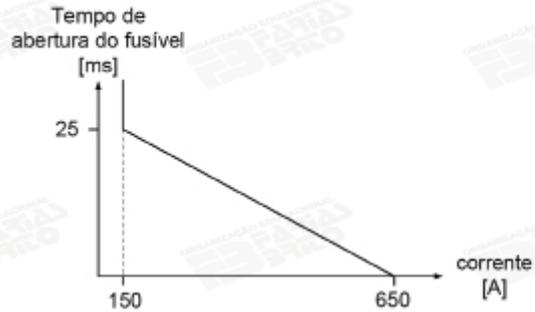


Figura 2

Uma fonte de tensão com tensão interna  $E$  e resistência interna  $R_{int} = 0,05 \Omega$ , protegida por um fusível, alimenta uma carga por meio de dois cabos com resistência linear igual a  $1 \Omega/\text{km}$ , como mostra a Figura 1. A Figura 2 mostra a aproximação da reta característica de operação do fusível utilizado na fonte.

Inicialmente, a carga que consome  $10 \text{ kW}$  e opera com tensão terminal  $V_T$  igual a  $100 \text{ V}$ , mas, subitamente, um curto circuito entre os cabos que alimentam a carga faz com que o fusível se rompa, abrindo o circuito. Sabendo-se que o tempo de abertura do fusível foi de  $1,25 \text{ ms}$ , a energia total dissipada nos cabos, em joules, durante o período de ocorrência do curto circuito é, aproximadamente:

- (A) 41
- (B) 55
- (C) 73
- (D) 90
- (E) 98

**Comenta**

**CIRCUITOS**

Começamos pela carga, que é um resistor:

$$\begin{aligned} \text{Pot} &= U \cdot i & \text{e} & & U &= R \cdot i \\ 10^4 &= 100 \cdot i & & & 100 &= R \cdot 100 \\ i &= 100 \text{ A} & & & R &= 1 \Omega \end{aligned}$$

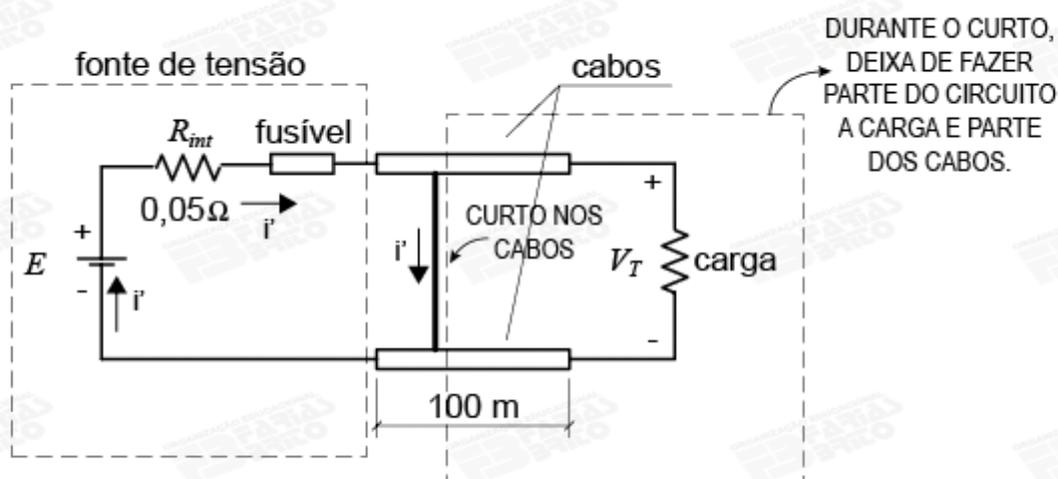
Para cabos:  $R_{\text{cabos}} = \rho \cdot L$

$$R_{\text{cabos}} = \frac{1\Omega}{\text{km}} \cdot 0,2 \text{ km} = 0,2\Omega$$

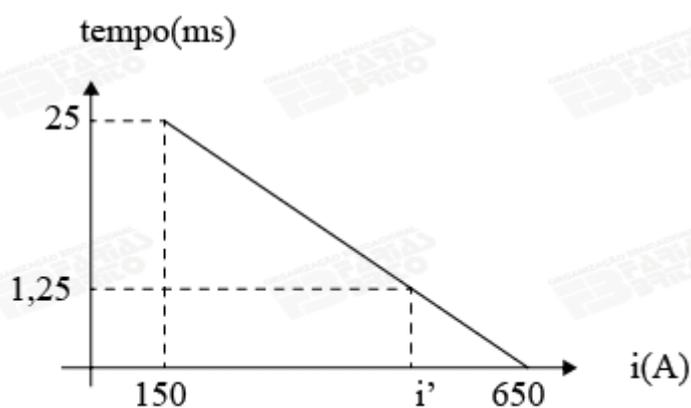
Para a fonte, podemos determinar sua  $f \cdot c \cdot m \cdot (\epsilon)$ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= R_{\text{eq}} \cdot i, R_{\text{eq}} = r_{\text{int}} + R_{\text{cabos}} + R \\ \epsilon &= (0,05 + 0,2 + 1) \cdot 100 \\ \epsilon &= 125 \text{ V} \end{aligned}$$

Durante o curto nos cabos, o circuito tem um aumento significativo da corrente, em virtude de uma redução da  $R_{eq}$ :



A nova corrente  $i'$ , que atravessa o fusível durante o curto, é determinada pela curva do fusível.



$$\frac{25}{500} = \frac{1,25}{650 - i'} \rightarrow 650 - i' = 25$$

$$\boxed{i' = 625 \text{ A}}$$

Logo:  $\varepsilon = R_{eq}' \cdot i'$ ,  $R_{eq}' = 0,05 + R'_{cabos}$

$$125 = (0,5 + R'_{cabos}) \cdot 625$$

$$R'_{cabos} = 0,2 - 0,05 = 0,15 \Omega$$

**Obs.:** Esse valor, nos permite localizar a posição em que ocorreu o curto, nesse caso a 25 m da carga.

Assim, podemos calcular a energia dissipada nos cabos durante o curto:

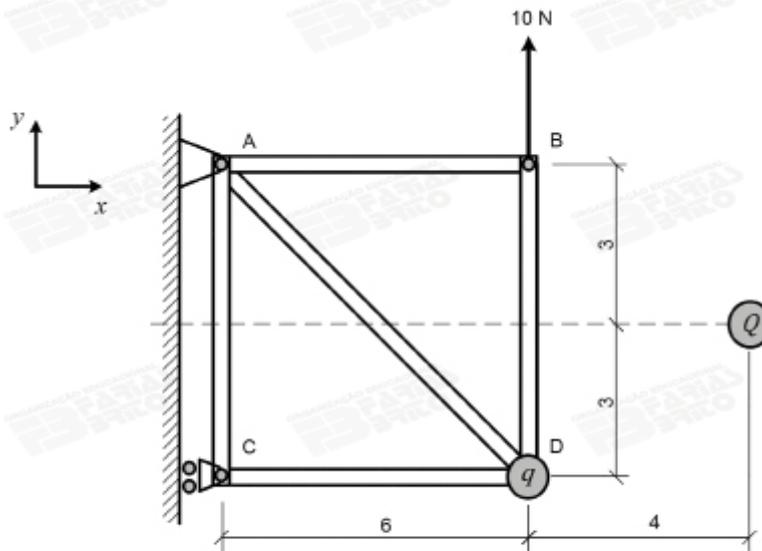
$$E_{diss} = Pot_{diss} \Delta t$$

$$E_{diss} = R'_{cabos} \cdot (i')^2 \cdot \Delta t$$

$$E_{diss} = 0,15 \cdot 625^2 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3} \cong 73 \text{ J}$$

**Resposta correta: (C)**

29ª QUESTÃO



A figura mostra uma estrutura composta pelas barras AB, AC, AD e CD e BD articuladas em suas extremidades. O apoio no ponto A impede os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ , enquanto o apoio no ponto C impede o deslocamento apenas na direção  $x$ . No ponto D dessa estrutura encontra-se uma partícula elétrica de carga positiva  $q$ . Uma partícula elétrica de carga positiva  $Q$  encontra-se posicionada no ponto indicado na figura. Uma força de 10 N é aplicada no ponto B, conforme indicada na figura. Para que a força de reação no ponto C seja zero, o produto  $q \cdot Q$  deve ser igual a:

Observação:

- as barras e partículas possuem massa desprezível; e
- as distâncias nos desenhos estão representadas em metros.

Dado:

- constante eletrostática do meio:  $k$ .

(A)  $\frac{1250}{7k}$

(B)  $\frac{125}{70k}$

(C)  $\frac{7}{1250k}$

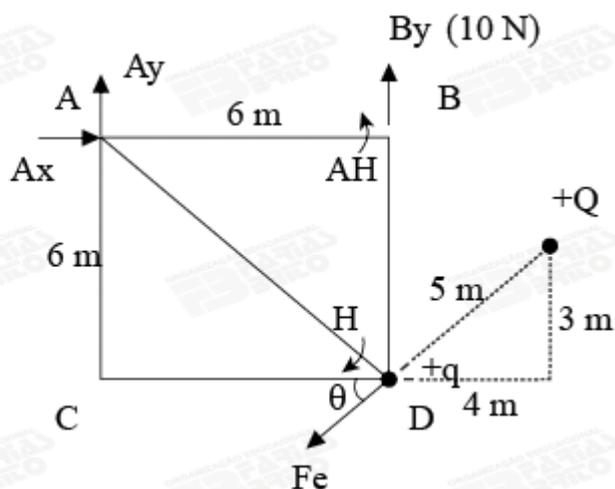
(D)  $\frac{1250}{k}$

(E)  $\frac{k}{1250}$



### TRELIÇAS

Considerando a treliça como um corpo rígido, temos:



$$F_e = \frac{KQq}{5^2}$$

$$F_e = \frac{KQ \cdot q}{25}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{3}{5}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{4}{5}$$

$$F_{ex} = F_e \cdot \text{cos}\theta$$

$$F_{ey} = F_e \cdot \text{sen}\theta$$

Fazendo o equilíbrio de rotação em torno do ponto A e considerando que a força no apoio C é nula, temos:

$$\sum T_A = 0$$

$$T_B + T_{Fe} = 0$$

$$(+B \cdot d_B) + (-F_{ex} \cdot d_{F_{ex}}) + (-F_{ey} \cdot d_{F_{ey}}) = 0$$

$$10 \cdot 6 - F_e \cdot \frac{4}{5} \cdot 6 - F_e \cdot \frac{3}{5} \cdot 6 = 0$$

$$\frac{7}{5} F_e = 10$$

$$F_e = \frac{50}{7} \text{ N}$$

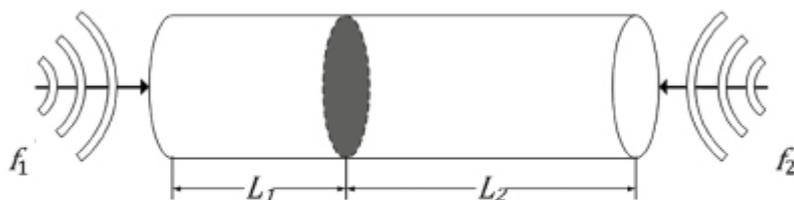
$$\frac{KQ \cdot q}{25} = \frac{50}{7}$$

$$Q \cdot q = \frac{1250}{7K}$$

Resposta IME: (C)

Resposta FB: (A)

30ª QUESTÃO



Um tubo sonoro de comprimento total  $L = 1\text{m}$ , aberto nas duas extremidades, possui uma parede móvel em seu interior, conforme a figura. Essa parede é composta de material refletor de ondas sonoras e pode ser transladada para diferentes posições, dividindo o tubo em duas câmaras de comprimento  $L_1$  e  $L_2$ . Duas ondas sonoras distintas adentram nesse tubo, uma pela abertura da esquerda, com  $f_1 = 2,89\text{ kHz}$ , e outra pela abertura da direita, com  $f_2 = 850\text{ Hz}$ . Em relação às ondas sonoras, os valores de  $L_1$  e  $L_2$ , em cm, que possibilitarão a formação de ondas ressonantes em ambas as cavidades são, respectivamente:

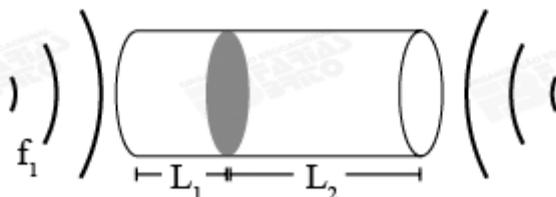
**Dado:**

- O meio no interior do tubo é o ar, onde o som se propaga com velocidade  $340\text{ m/s}$ .

- (A) 14,7 e 85,3
- (B) 44,1 e 55,9
- (C) 50,0 e 50,0
- (D) 70,0 e 30,0
- (E) 90,0 e 10,0

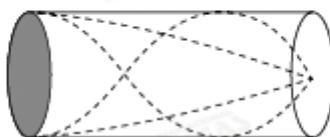
**Comenta**

**ACÚSTICA**



onde  $L_1 + L_2 = L_M$   
 $f_1 = 2,89\text{ kHz}$   
 $f_2 = 850\text{ Hz}$

As frequências de ressonâncias são:



$\eta_{\text{ímpar}} \cdot \frac{\lambda}{4} = L \rightarrow \eta_{\text{ímpar}}$  deve ser um número ímpar.

Logo:

$$\eta_1 \cdot \frac{\lambda_1}{4} + \eta_2 \cdot \frac{\lambda_2}{4} = 1$$

$$\eta_1 \cdot \frac{34\cancel{\theta}}{289\cancel{\theta}} + \eta_2 \cdot \frac{34\cancel{\theta}}{85\cancel{\theta}} = 4$$

$$\eta_1 \cdot \frac{8,5}{284} + \eta_2 \cdot \frac{8,5}{85} = 1$$

$$\boxed{\frac{\eta_1}{34} + \frac{\eta_2}{10} = 1}$$

Para limitar os valores de  $(\eta)$ , façamos:

$$\eta_1 < 4 \cdot \frac{1}{34\cancel{\theta}} \cdot 289\cancel{\theta} = 34$$

$$\eta_2 < 4 \cdot \frac{1}{85\cancel{\theta}} \cdot 85\cancel{\theta} = 10$$

Daí:

$$\eta_1 = 17 \text{ (ímpar)} \rightarrow L_1 = \frac{17 \cdot 340}{4 \cdot 2890} = 50 \text{ cm}$$

$$\eta_2 = 5 \text{ (ímpar)} \rightarrow L_2 = \frac{5 \cdot 340}{4 \cdot 850} = 50 \text{ cm}$$

**Resposta correta: (C)**

## Química

### 31ª QUESTÃO

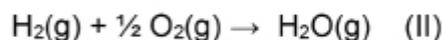
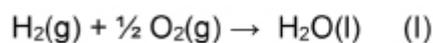
Admita que uma solução aquosa 0,0400 molar de ácido tricloroacético congele a  $-0,1395 \text{ }^\circ\text{C}$ . Considere, ainda, que a constante de abaixamento do ponto de congelamento ( $K_c$ ) da água seja  $1,860 \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  e que 1,00 L de solução contenha 1,00 kg de solvente. O valor da constante de dissociação ( $K_a$ ) do ácido tricloroacético será:

- (A)  $4,90 \cdot 10^{-7}$
- (B)  $3,28 \cdot 10^{-5}$
- (C)  $7,66 \cdot 10^{-3}$
- (D)  $1,36 \cdot 10^{-2}$
- (E)  $2,45 \cdot 10^{-1}$



## 33ª QUESTÃO

Considere as reações abaixo:



Assinale a alternativa correta.

- (A) O decréscimo de entropia é menor na reação (I) do que na reação (II).
- (B) O acréscimo de entropia na reação (I) é maior do que na reação (II).
- (C) O decréscimo de entropia é menor na reação (II) do que na reação (I).
- (D) O acréscimo de entropia na reação (II) é maior do que na reação (I).
- (E) A variação de entropia é igual em ambas as reações.



**Comenta**

## TERMODINÂMICA

Observe que a variação de entropia é negativa em ambas as reações ( $\Delta S < 0$ ), fato sugerido pela diminuição da quantidade proporcional de gases entre reagentes e produtos. Logo, em ambas haverá um decréscimo de entropia. Para a reação (I), o decréscimo de entropia foi maior, pois, para os mesmos reagentes gasosos, a formação do produto líquido provoca um decréscimo maior de entropia que quando ocorre formação de um produto gasoso.

**Resposta correta: (C)**

## 34ª QUESTÃO

É requerido que fazendas produtoras de leite bovino controlem a acidez do leite que está aguardando o processamento. Essa acidez é resultante da conversão da lactose em ácido láctico (ácido 2-hidroxipropanoico) por ação de microrganismos:



Um fazendeiro decidiu fazer um experimento para determinar a taxa de geração de ácido láctico no leite armazenado: retirou uma amostra de  $50 \text{ cm}^3$  de leite, cuja concentração de ácido láctico é de  $1,8 \text{ g/L}$ , e, depois de três horas, utilizou  $40 \text{ cm}^3$  de uma solução  $0,1$  molar de  $\text{NaOH}$  para neutralizá-la.

Conclui-se que a taxa média de produção de ácido láctico por litro de leite é:

- (A)  $0,25 \text{ mg/L.s}$
- (B)  $0,33 \text{ mg/L.s}$
- (C)  $0,50 \text{ mg/L.s}$
- (D)  $0,67 \text{ mg/L.s}$
- (E)  $1,00 \text{ mg/L.s}$

 **Comenta**

## REAÇÃO ÁCIDO-BASE/TITULAÇÃO

- No processo, há uma reação de neutralização entre o ácido láctico e o hidróxido de sódio.
- Na amostra inicial de leite, 50 cm<sup>3</sup>, há 1,8 g/L de ácido láctico.  
Cálculo da quantidade de matéria (número de mols) de ácido láctico na amostra inicial.

$$n(\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_3) = \frac{1 \text{ mol C}_3\text{H}_6\text{O}_2}{90 \text{ g C}_3\text{H}_6\text{O}_3} \cdot \frac{1,8 \text{ g C}_3\text{H}_6\text{O}_3}{1 \text{ L}} \cdot 0,05 \text{ L} = 0,001 \text{ mol de C}_3\text{H}_6\text{O}_3$$

- Cálculo da quantidade de matéria (número de mols) de hidróxido de sódio utilizado.

$$n(\text{NaOH}) = \frac{0,1 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ L}} \cdot 0,04 \text{ L} = 0,004 \text{ mol de C}_3\text{H}_6\text{O}_3$$

Reação de neutralização



como a proporção estequiométrica, na reação, entre o ácido e a base é de 1:1, concluímos que há uma taxa de produção de ácido láctico de 0,003 mol no período de 3 horas para o volume de 50 cm<sup>3</sup> de leite.

- Produção:  $n_{\text{final}} - n_{\text{inicial}} = 0,004 \text{ mol} - 0,001 \text{ mol} = 0,003 \text{ mol}$   
Logo, a taxa média de produção de ácido láctico é:

$$V = \frac{90 \text{ g de C}_3\text{H}_6\text{O}_3}{1 \text{ mol C}_3\text{H}_6\text{O}_3} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ mol C}_3\text{H}_6\text{O}_3}{5 \cdot 10^{-2} \text{ L} \cdot 3 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{10^3 \text{ mg}}{1 \text{ g}} = 0,5 \text{ mg / L} \cdot \text{s}$$

**Resposta correta: (C)**

### 35ª QUESTÃO

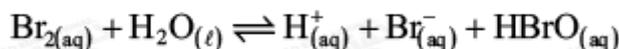
Escolha a alternativa que apresenta as substâncias relacionadas em ordem crescente de solubilidade em água, a 25 °C e 1 atm:

- (A) Bromo < dissulfeto de carbono < butanol < etanol < brometo de potássio.
- (B) Metano < neopentano < dietilcetona < *t*-butanol < *n*-butanol.
- (C) Hidróxido de alumínio < carbonato de cálcio < carbonato de magnésio < nitrato de prata < sulfato de bário.
- (D) Isobutano < *p*-diclorobenzeno < *o*-diclorobenzeno < *o*-nitrofenol < *p*-nitrofenol.
- (E) Cromato de chumbo (II) < Cromato de bário < carbonato de sódio < carbonato de magnésio < clorato de magnésio.



## SOLUBILIDADE

- A) Incorreta. O bromo apresenta certa solubilidade em água, devido a reações que originam a chamada “água de bromo”, por exemplo:



Dissulfeto de carbono ( $\text{CS}_2$ ) é um líquido apolar que não reage com a água, portanto é menos solúvel que o  $\text{Br}_2$ .

- B) Incorreta. Metano e neopentano são hidrocarbonetos (apolares) e possuem solubilidades muito baixas em água.  
A solubilidade do metano é maior, devido ao menor tamanho de sua molécula.
- C) Incorreta. Sulfato de bário ( $\text{BaSO}_4$ ), devido a uma elevada energia reticular, é menos solúvel em água que nitrato de prata ( $\text{AgNO}_3$ ).
- D) Correta. Isobutano é o menos solúvel, por ser um hidrocarboneto. O-diclorobenzeno é polar e mais solúvel que p-diclorobenzeno, que é apolar. O-nitrofenol possui ligação de hidrogênio intramolecular, o que reduz as interações com a água, tornando-o menos solúvel que o p-nitrofenol.
- E) Incorreta. Carbonato de magnésio ( $\text{MgCO}_3$ ), devido a uma elevada energia reticular, é menos solúvel que o carbonato de sódio ( $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ).

**Resposta correta: (D)**

### 36ª QUESTÃO

Assinale a alternativa correta:

- (A) A estrutura primária de uma proteína é definida pela ordem em que os aminoácidos adenina, timina, citosina e guanina se ligam entre si.
- (B) A estrutura secundária de uma proteína é definida por conformações locais de sua cadeia principal que assumem padrões específicos, tais como hélices  $\alpha$  e folhas  $\beta$ .
- (C) A estrutura terciária de uma proteína é definida pelo modo conforme duas ou mais cadeias polipeptídicas se agregam entre si.
- (D) As enzimas são proteínas que atuam como catalisadores biológicos e que se caracterizam pela sua capacidade de reagir, simultaneamente, com milhares de substratos de grande diversidade estrutural.
- (E) A glicose, a ribose e a frutose são enzimas que devem ser obrigatoriamente ingeridas na dieta dos seres humanos, uma vez que nossos organismos não conseguem sintetizá-las.

 **Comenta**

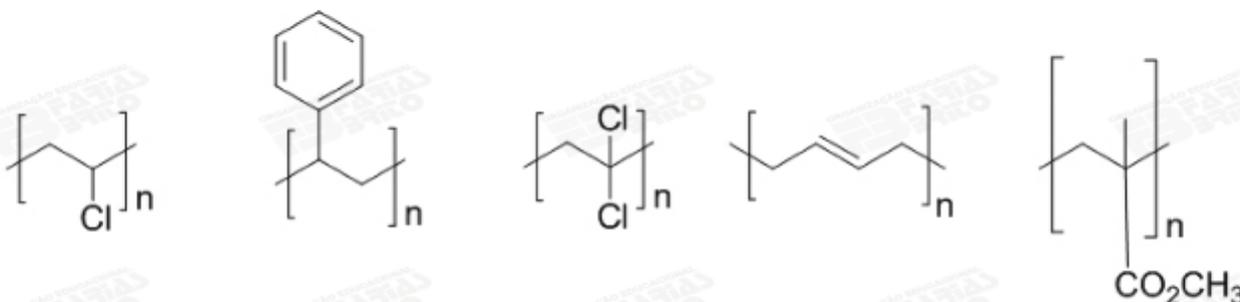
## BIOQUÍMICA

- A) (Falsa) Adenina, timina, citosina e guanina são bases nitrogenadas e não aminoácidos.
- B) (Verdadeira) A estrutura secundária da proteína refere-se ao enrolamento ou dobramento de uma cadeia de polipeptídeo que dá à proteína a sua forma 3D. Existem duas formas de estruturas secundárias, uma do tipo hélice alfa ( $\alpha$ ) e outra beta ( $\beta$ ).
- C) (Falsa) A estrutura terciária da proteína refere-se à estrutura 3D da cadeia polipeptídica de uma proteína. Existem vários tipos de ligações e forças que influenciam uma proteína terciária. As interações hidrofóbicas contribuem ativamente para dobrar e moldar uma proteína. Os aminoácidos com grupos “R” hidrofílicos buscarão contato com o ambiente aquoso, enquanto o grupo “R” hidrofóbico buscará o centro da proteína, distanciando-se do meio aquoso.
- D) (Falsa) As enzimas são proteínas que atuam como catalisadores específicos, ou seja, caracterizam-se pela capacidade de reagir unicamente com um só tipo de substrato.
- E) (Falsa) A glicose e a frutose são monossacarídeos da classe das hexoses. A ribose é um monossacarídeo da classe das pentoses. Os monossacarídeos correspondem às unidades primárias dos carboidratos.

**Resposta correta: (B)**

### 37ª QUESTÃO

Considere as representações, não identificadas, dos seguintes polímeros: polibutadieno, poliestireno, poli(cloreto de vinila), poli(metacrilato de metila) e poli(cloreto de vinilideno).



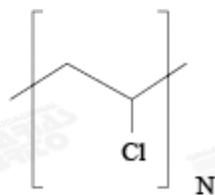
Com base nessas estruturas, avalie as sentenças a seguir:

- I – O poli(cloreto de vinilideno) apresenta isomeria óptica enquanto o poli(cloreto de vinila) não apresenta isomeria óptica.
- II – O polibutadieno pode apresentar estereoisômeros cis e trans.
- III – A massa molar do mero do poliestireno é maior do que a do mero do polibutadieno.
- IV – A transesterificação do poli(metacrilato de metila) com etanol produz acetato de metila mais o poli(álcool vinílico).

É correto apenas o que se afirma nas sentenças:

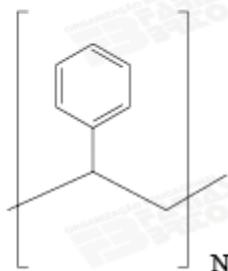
- (A) II e III.  
 (B) I e II.  
 (C) II e IV.  
 (D) I, III e IV.  
 (E) I, II e III.

## POLÍMEROS



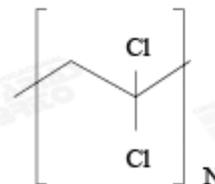
POLI (CLORETO DE VINILA)

(A)



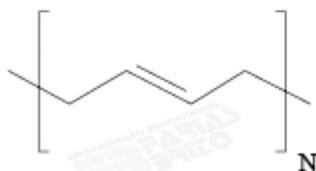
POLIESTIRENO

(B)



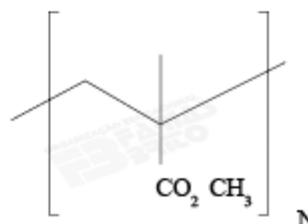
POLI (CLORETO DE VINILIDENO)

(C)



POLIBUTADIENO

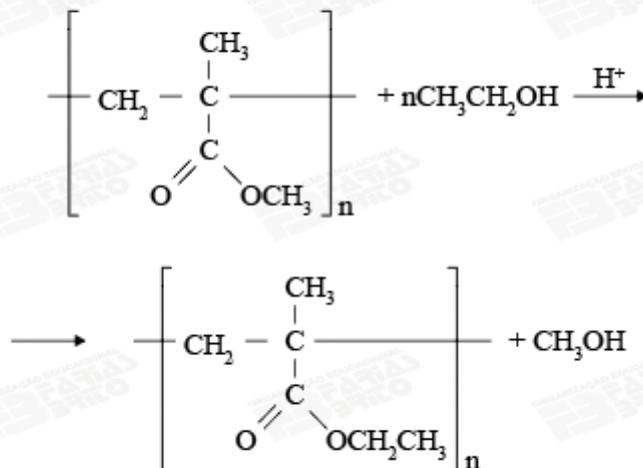
(D)



POLI(METACRILATO DE METILA)

(E)

- I. **Incorreta.** A estrutura C não possui centros quirais, portanto não apresenta isomeria óptica. Já a estrutura A apresenta isomeria óptica devido à quiralidade dos átomos de carbono ligados a cloro.
- II. **Correta.** A ligação dupla do mero possui ligantes distintos em cada átomo de carbono, o que gera a estereoisomeria geométrica.
- III. **Correta.** A fórmula molecular do mero de B é  $C_8H_8$ , com massa molar de 104 g/mol. A fórmula molecular do mero de D é  $C_4H_6$ , com massa molar de 54 g/mol.
- IV. **Incorreta.** A reação produz metanol e o polímero etílico mostrado abaixo.



Resposta correta: (A)

## 38ª QUESTÃO

Assinale a alternativa VERDADEIRA:

- (A) A energia de ligação na molécula de NO é maior que no íon NO<sup>+</sup>.  
 (B) A energia de ligação na molécula de CO é maior que no íon CO<sup>+</sup>.  
 (C) A molécula de O<sub>2</sub> tem maior energia de ligação que os íons O<sub>2</sub><sup>+</sup> e O<sub>2</sub><sup>-</sup>.  
 (D) A ligação dupla C=C tem o dobro da energia da ligação simples C-C.  
 (E) O íon NO<sup>-</sup> é mais estável que o íon NO<sup>+</sup>.



## ENERGIA DE LIGAÇÃO

Segundo a Teoria do Orbital Molecular (TOM), a Ordem de Ligação (OL) é dada por:

$$OL = \frac{\left( \text{N}^\circ \text{ de elétrons em OM ligantes} \right) - \left( \text{N}^\circ \text{ de elétrons em OM antiligantes} \right)}{2}$$

OM = orbitais moleculares

Quanto maior a OL, maior a energia necessária para quebrar uma ligação.

- A) Incorreto. O NO possui OL = 2,5, enquanto o NO<sup>+</sup> tem OL = 3.
- B) Segundo o livro Química Inorgânica não tão Concisa – 5ª edição, do autor J. D. Lee, o item está incorreto, conforme texto da página 57. Nesta se afirma que o comprimento de ligação no CO é 1,128 Å, enquanto no CO<sup>+</sup> é 1,115 Å, o que corrobora com uma maior energia de ligação para o CO<sup>+</sup>. Tal redução de comprimento de ligação indica que no processo CO → CO<sup>+</sup> + e<sup>-</sup> retira-se um elétron de OM antiligante, diferente do esperado. Assim, o modelo da TOM para moléculas diatômicas homonucleares, como o N<sub>2</sub>, não se aplica automaticamente ao CO.
- C) Incorreto. O<sub>2</sub><sup>+</sup> tem maior OL que O<sub>2</sub> (1,5 versus 2), pois possui menor quantidade de elétrons em OM antiligantes. O<sub>2</sub><sup>-</sup> possui maior OL que O<sub>2</sub> (2,5 versus 2), pois possui maior quantidade de elétrons ligantes.
- D) Incorreto. A ligação dupla C = C não possui o dobro da energia da ligação simples C – C. Observe que a ligação π é mais fraca que a σ, pois se forma por sobreposição lateral de orbitais. Assim, a formação de uma ligação dupla (sigma + pi) não dobra a energia de ligação, em relação a uma ligação simples.
- E) Incorreto. No NO<sup>-</sup> há maior quantidade de elétrons em OM antiligantes, o que diminui a OL e, portanto, a energia de ligação, dando menor estabilidade ao NO<sup>-</sup>.

**Resposta IME: (B)**

**Resposta FB: NULA**

## 39ª QUESTÃO

Quanto à precipitação do hidróxido férrico ( $K_{PS} = 1,0 \cdot 10^{-36}$ ) em uma solução 0,001 molar de  $Fe^{3+}$ , é correto afirmar que

- (A) independe do pH.
- (B) ocorre somente na faixa de pH alcalino.
- (C) ocorre somente na faixa de pH ácido.
- (D) não ocorre para  $pH < 3$
- (E) ocorre somente para  $pH \geq 12$ .

 **Comenta**

### PRODUTO DE SOLUBILIDADE

A condição para ocorrer precipitação será:  $Q_{ps} > k_{ps}$ . Ou seja:

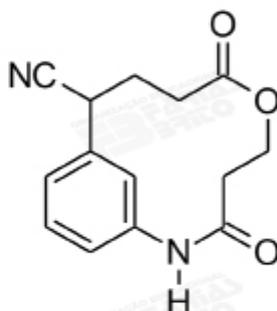
$$[Fe^{3+}] \cdot [OH^-]^3 > k_{ps} \Rightarrow 10^{-3} \cdot [OH^-]^3 > 1 \cdot 10^{-36} \Rightarrow [OH^-] > 10^{-11} \text{ mol/L} \Rightarrow pOH < 11 \Rightarrow pH > 3.$$

Logo, a precipitação deve ocorrer apenas para valores de pH superiores a 3.

**Resposta correta: (D)**

## 40ª QUESTÃO

Assinale, dentre as alternativas, aquela que corresponde às funções orgânicas geradas após a hidrólise ácida total da molécula abaixo:

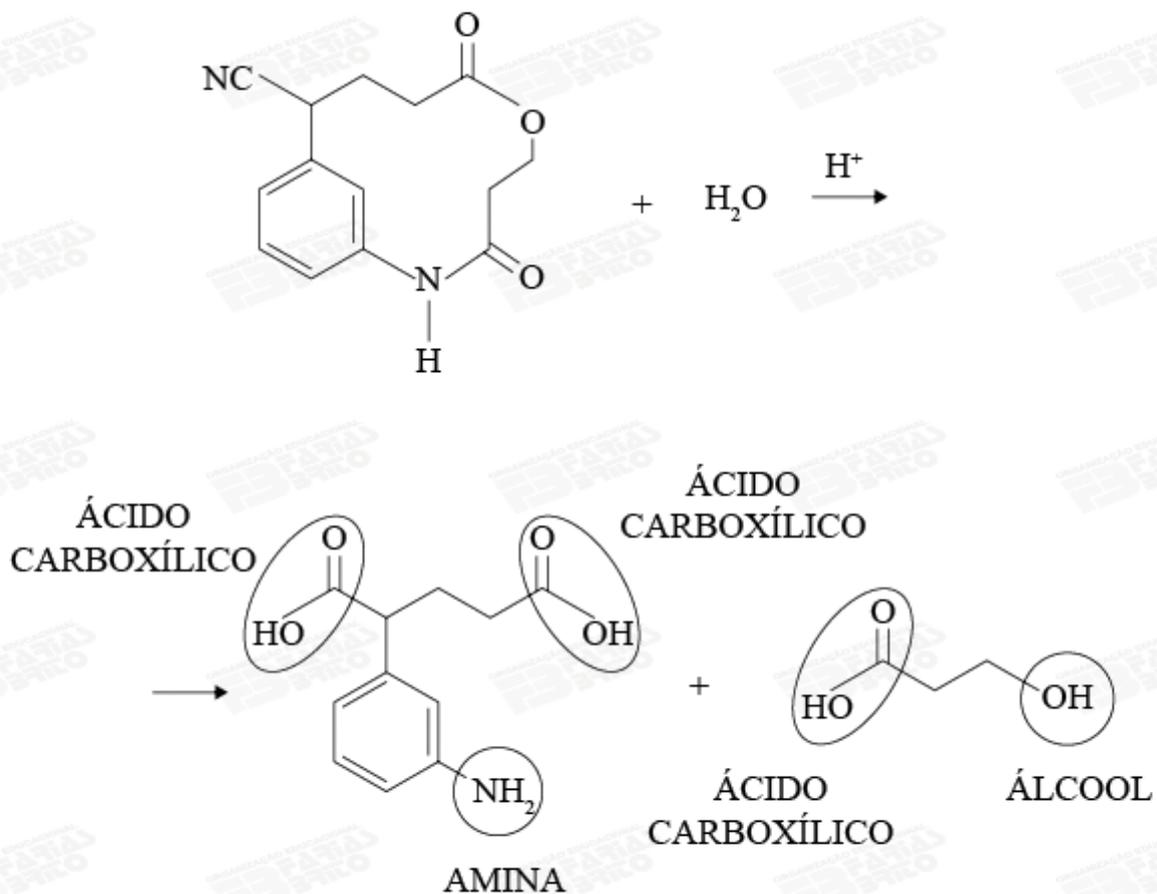


- (A) Ácido carboxílico, amina, álcool.
- (B) Amina, ácido carboxílico, álcool, aldeído.
- (C) Álcool, cetona, éster, éter.
- (D) Amida, aldeído, cetona.
- (E) Éter, amida, ácido carboxílico.



## REAÇÕES ORGÂNICAS

A hidrólise ácida total da molécula é equacionada a seguir:



Resposta correta: (A)

Matemática

1ª QUESTÃO

Valor: 1,0

Um jogo de dominó possui 28 peças com duas pontas numeradas de zero a seis, independentemente, de modo que cada peça seja única, conforme ilustra a Figura 1.

O jogo se desenrola da seguinte forma:

- 1- Quatro jogadores se posicionam nos lados de uma mesa quadrada.
- 2- No início do jogo, cada jogador recebe um conjunto de 7 peças, de forma aleatória, de modo que somente o detentor das peças possa ver seu conteúdo.
- 3- As ações ocorrem por turnos no sentido anti-horário.
- 4- O jogador com a peça 6|6 coloca-a sobre a mesa e em seguida cada jogador, na sua vez, executa uma de duas ações possíveis:
  - a. Adiciona uma de suas peças de forma adjacente a uma das duas extremidades livres do jogo na mesa, de modo que as peças sejam encaixadas com pontas de mesmo valor.
  - b. Passa a vez, caso não possua nenhuma peça com ponta igual a uma das extremidades livres da mesa.
- 5- Vence o jogo o primeiro jogador que ficar sem peças na mão.

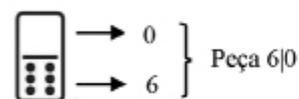


Figura 1



Figura 2

No jogo da Figura 2, é a sua vez de jogar e você constatou que o jogador à sua direita não possui peças com ponta 5 e o jogador à sua frente não possui peças com ponta 0. Você analisou todas as possíveis configurações de peças que os jogadores podem ter em suas mãos e decidiu jogar de modo a garantir que uma das pontas livres da mesa só possa ser usada por uma peça de sua posse, e que esta será a sua última peça em mão. Ao utilizar essa estratégia:

- a) Quantas configurações de peças nas mãos dos jogadores garantem a vitória do jogo a você?
- b) Esta quantidade corresponde a qual percentual do total de configurações possíveis?

**Observação:**

- A ordem das peças na mão de um jogador não importa.

**Comenta**

**ANÁLISE COMBINATÓRIA**

- a) Peças faltantes na mão dos outros 3 jogadores: 3/2, 4/0, 4/1, 5/0, 5/1, 5/4, 5/6, 6/0.  
Minhas peças: 6/2, 4/3 e 2/0.

Para obedecer a regra do problema, eu devo jogar na ponta de nº 6 a peça  $\boxed{6/2}$  para que as duas pontas fiquem com o nº 2. Dessa forma, quem possuir a peça  $\boxed{3/2}$  deverá utilizá-la, e então uma das pontas fica com o nº 3, a outra fica com o nº 2 e apenas eu possuo ainda peça com o nº 2, de modo que, com esta peça irei vencer o jogo (ela será a última a ser jogada).

Após isso, o jogo volta para mim e eu coloco a peça  $\boxed{4/3}$ , ficando apenas com a peça  $\boxed{2/0}$  em minha mão. Tudo o que precisamos fazer agora é garantir que o jogador a minha esquerda não vença antes de mim.

Vamos dividir em 3 casos:

Se o jogador à minha esquerda não estiver com o  $\boxed{3 \ 2}$  → Eu ganho em qualquer cenário.

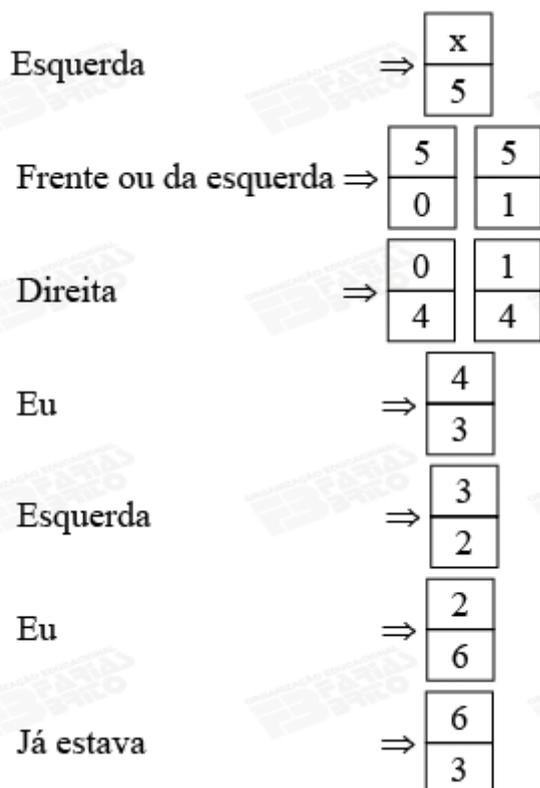
	Jogador da frente
1ª Caso: Casos com a peça $\boxed{3 \ 2}$ no jogador da direita: $\boxed{4 \ 0}$ e $\boxed{6 \ 0}$	$\binom{4}{3}$ possibilidades
Total: $\binom{4}{3} + \binom{3}{3} + \binom{3}{3} = 6$	$\binom{3}{3}$ possibilidades
	$\binom{3}{3}$ possibilidades

2ª Caso: Se o jogador a minha frente estiver com a peça  $\boxed{3 \ 2}$  → Eu ganho em qualquer cenário.  
 Casos com a peça  $\boxed{3 \ 2}$  no jogador da frente → O jogador da direita deve ter  $\boxed{4 \ 0}$ ,  $\boxed{4 \ 1}$  e  $\boxed{6 \ 0}$  e o da frente terá  $\binom{3}{2}$  possibilidades.

Total:  $\binom{3}{2} \cdot 1 = 3$  possibilidades.

3º Caso: Vejamos agora se é o jogador da esquerda quem possui a peça  $\boxed{3/2}$ .

Precisamos analisar os casos em que o jogador da esquerda não vença antes de mim, mas o da esquerda possuindo a peça  $\boxed{3/2}$  ⇒ O jogador da direita só poderá ficar com as peças  $\boxed{4/0}$ ,  $\boxed{4/1}$  e  $\boxed{6/0}$ , pois ele não pode ter o nº 5 ⇒ O jogador da esquerda necessariamente possuirá um 5. Com esse 5 ele vencerá antes de mim. Veja as possibilidades:



Portanto, o total de casos em que eu venço é  $6 + 3 = 9$  casos

b) Vejamos o total de casos possíveis:

→ Jogador da direita com 2 zeros: 2 possibilidades para a 3ª peça e  $\binom{4}{3}$  possibilidades para o jogador da frente, resultando em  $2 \cdot \binom{4}{3} = 2 \cdot 4 = 8$  casos.

→ Jogador da direita com 1 zero: 2 possibilidades para o zero e as outras 2 peças estão determinadas. O jogador da frente tem  $\binom{3}{3}$  possibilidades.

Total:  $2 \cdot \binom{3}{3} = 2$  possibilidades.

→ Jogador da direita com 0 zeros: Não pode, pois ele teria um nº 5.

Portanto, o total de casos possíveis é  $8 + 2 = 10$

Logo, o percentual de configurações em que eu venço é  $\frac{9}{10} = 90\%$

## 2ª QUESTÃO

Definimos a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), \quad n \geq 1 \\ f(2n+1) = f(n) + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Determine  $f(f(2019))$ .

Observação:  $\lfloor k \rfloor$  é o maior inteiro menor ou igual a  $k$ .



## Função

De posse das características de  $f$ , tem-se:

$$f(2019) = f(1009) + 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor} = f(1009) + 2^9$$

$$f(1009) = f(504) + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor} = f(504) + 2^8$$

$$f(504) = f(252) = f(126) = f(63)$$

$$f(63) = f(31) + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor} = f(31) + 2^4$$

$$f(31) = f(15) + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor} = f(15) + 2^3$$

$$f(15) = f(7) + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor} = f(7) + 2^2$$

$$f(7) = f(3) + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor} = f(3) + 2^1$$

$$f(3) = f(1) + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} = 1 + 2^0 = 2$$

Daí,  $f(7) = 4$ ,  $f(15) = 8$ ,  $f(31) = 16$ ,  $f(63) = 32$ ,  $f(504) = 32$

$f(1009) = 288$ ,  $f(2019) = 800$

Por outro lado, encontramos:

$$f(f(2019)) = f(800) = f(400) = f(200) = f(100) = f(50) = f(25)$$

$$f(25) = f(12) + 2^{\lfloor \log_2 12 \rfloor} = f(12) + 2^3$$

$$f(12) = f(6) = f(3) = 2 \Rightarrow f(25) = 10$$

Logo,  $f(f(2019)) = 10$ .

### 3ª QUESTÃO

Dadas as funções definidas nos reais  $\mathbb{R}$ :

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = \text{sen}(x), f_3(x) = \text{cos}(x), f_4(x) = \text{sen}(2x) \text{ e } f_5(x) = e^{-x}.$$

Mostre que existe uma única solução  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ , tal que:

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + a_4 f_4(x) + a_5 f_5(x) \text{ seja a função constante nula, onde } a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}.$$

### Comenta

## EXPONENCIAIS, TRIGONOMETRIA E CÁLCULO

Temos

$$a_1 e^x + a_2 \text{sen } x + a_3 \text{cos } x + a_4 \text{sen } 2x + a_5 e^{-x} = 0 \quad (*)$$

Dividindo (\*) por  $e^x$ :

$$a_1 + a_2 \left( \frac{\text{sen } x}{e^x} \right) + a_3 \left( \frac{\text{cos } x}{e^x} \right) + a_4 \left( \frac{\text{sen } 2x}{e^x} \right) + a_5 \left( \frac{1}{e^{2x}} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Para } x \rightarrow +\infty, \frac{\text{sen } x}{e^x}, \frac{\text{cos } x}{e^x}, \frac{\text{sen } 2x}{e^x}, \frac{1}{e^{2x}} = 0$$

Visto que  $e^x, e^{2x} \rightarrow +\infty$  e  $|\text{sen } x|, |\text{cos } x|, |\text{sen } 2x| \leq 1$ .

Portanto, em (1):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{a_1}_{\rightarrow 0} + \underbrace{a_2 \left( \frac{\text{sen } x}{e^x} \right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{a_3 \left( \frac{\text{cos } x}{e^x} \right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{a_4 \left( \frac{\text{sen } 2x}{e^x} \right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{a_5 \left( \frac{1}{e^{2x}} \right)}_{\rightarrow 0} \right) = 0 \quad \therefore \boxed{a_1 = 0}$$

De maneira similar, dividindo (\*) por  $e^{-x}$ :

$$a_1 \cdot e^{2x} + a_2 (e^x \cdot \text{sen } x) + a_3 (e^x \cdot \text{cos } x) + a_4 (e^x \cdot \text{sen } 2x) + a_5 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Para } x \rightarrow -\infty, e^x \text{sen } x, e^x \text{cos } x, e^x \text{sen } 2x, e^{2x} \rightarrow 0,$$

Visto que  $e^x, e^{2x} \rightarrow 0$  e  $|\text{sen } x|, |\text{cos } x|, |\text{sen } 2x| \leq 1$ .

Portanto, em (2):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \underbrace{a_1 \cdot e^{2x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{a_2 (e^x \text{sen } x)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{a_3 (e^x \text{cos } x)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{a_4 (e^x \text{sen } 2x)}_{\rightarrow 0} + a_5 \right) = 0 \quad \therefore \boxed{a_5 = 0}$$

Portanto, (\*) vira:  $a_2 \operatorname{sen} x + a_3 \operatorname{cos} x + a_4 \operatorname{sen} 2x = 0$  (\*\*)

Tomando  $x = 0$  em (\*\*):  $a_3 = 0$

Tomando  $x = \frac{\pi}{2}$  em (\*\*):  $a_2 = 0$

Tomando  $x = \frac{\pi}{4}$  em (\*\*):  $a_4 = 0$

Portanto,  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$  é a única solução.

#### 4ª QUESTÃO

Seja  $Z$  um número complexo tal que  $\frac{2Z}{\bar{Z}i}$  possui argumento igual a  $3\pi/4$  e  $\log_3(2Z + 2\bar{Z} + 1) = 2$ . Determine o número complexo  $Z$ .

#### Comenta

### NÚMEROS COMPLEXOS

Solução:

De acordo com o enunciado, temos:

$$\frac{2Z}{\bar{Z} \cdot i} = P \cdot \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$

Então:

$$\frac{2 \cdot |Z|}{|\bar{Z}| \cdot |i|} = P \cdot \left| \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} \right|$$

Logo:

$$2 = P \cdot 1 \rightarrow \boxed{P = 2}$$

Com isso:

$$Z = \bar{Z} \cdot i \cdot 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$

$$\boxed{Z = \bar{Z} \cdot \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}} \quad (\text{I})$$

Mas:

$$\log_3(2Z + 2\bar{Z} + 1) = 2$$

$$2Z + 2\bar{Z} + 1 = 9$$

$$2Z + 2\bar{Z} = 8$$

$$\boxed{Z + \bar{Z} = 4} \quad (\text{II})$$

Substituindo (a) equação (I) na equação (II), temos:

$$\bar{Z} \cdot \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} + \bar{Z} = 4$$

$$\bar{Z} \left( 1 + \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} \right) = 4$$

$$\bar{Z} \cdot \cancel{2} \cdot \cos \frac{5\pi}{8} \cdot \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{8} \right) = \cancel{4}$$

$$\bar{Z} = \frac{2}{\cos \frac{5\pi}{8} \cdot \operatorname{cis} \frac{5\pi}{8}} \cdot \operatorname{cis} \left( -\frac{5\pi}{8} \right)$$

$$\bar{Z} = \frac{2 \cdot \operatorname{cis} \left( -\frac{5\pi}{8} \right)}{\cos \left( \frac{5\pi}{8} \right)}$$

$$Z = \frac{2 \cdot \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{8} \right)}{\cos \frac{5\pi}{8}}$$

Portanto:

$$Z = 2 \cdot \left( 1 + i \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \right)$$

Outra solução:

Se  $Z = x + yi$ , temos:

$$\log_3 (2Z + 2\bar{Z} + 1) = 2$$

$$2Z + 2\bar{Z} + 1 = 9$$

$$2Z + 2\bar{Z} = 8$$

$$Z + \bar{Z} = 4$$

Com isso:

$$x + yi + x - yi = 4$$

$$2x = 4 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

Logo:

$$\frac{2Z}{\bar{Z} \cdot i} = \frac{2(2 + yi)}{(2 - yi) \cdot i} = \frac{4 + 2yi}{y + 2i} \cdot \frac{y - 2i}{y - 2i}$$

Então:

$$\frac{2Z}{\bar{Z} \cdot i} = \frac{8y}{y^2 + 4} + \frac{(2y^2 - 8)}{y^2 + 4} \cdot i$$

Como o argumento  $\frac{2Z}{Z \cdot i}$  é igual a  $\frac{3\pi}{4}$ , temos:

$$\frac{2y^2 - 8}{y^2 + 4} > 0$$

$$2y^2 - 8 > 0 \rightarrow |y| > 2 \text{ (I)}$$

Então:

$$\arg\left(\frac{2Z}{Z \cdot i}\right) = \frac{2y^2 - 8}{8y} = -1$$

Logo:

$$2y^2 - 8 = -8y \rightarrow 2y^2 + 8y - 8 = 0$$

$$y = -\frac{8 \pm 8\sqrt{2}}{4} \begin{cases} y = -2 + 2\sqrt{2} \text{ (não satisfaz de acordo com equação I)} \\ y = -2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Portanto:

$$Z = x + yi$$

$$Z = 2 + (-2 - 2\sqrt{2})i$$

### 5ª QUESTÃO

Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

### Comenta

## PG COM TEORIA DOS NÚMEROS

Considere a PG de termo inicial  $a$  e razão  $r$ , onde  $a \in \mathbb{N}$  e  $r \in \mathbb{Q}_+^*$ :  $a, a \cdot r, a \cdot r^2, a \cdot r^3, a \cdot r^4, \dots$

Vejamos em 2 casos:

1º caso: Se  $r > 1 \rightarrow$  temos uma PG crescente.

$$\text{Faça então } \begin{cases} \text{I } 16 = a \cdot r^x \\ \text{II } 24 = a \cdot r^y, \text{ com } z > y > x \geq 0. \\ \text{III } 81 = a \cdot r^z \end{cases}$$

Faça  $r = \frac{p}{q}$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$  /  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . Assim:

1º) Dividindo II por I:

$$\frac{24}{16} = r^{y-x} \rightarrow \frac{3}{2} = \left(\frac{p}{q}\right)^{y-x} \rightarrow p = 3, q = 2 \text{ e } y - x = 1 \rightarrow r = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{y - x = 1} \quad (1)$$

2º) Dividindo III por I:

$$\frac{81}{16} = r^{z-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{z-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \rightarrow \boxed{z - x = 4} \quad (2)$$

3º) De I:  $16 = a \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^x = a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \rightarrow \boxed{2^{4+x} \cdot 3^{-x} = a} \quad (3)$

4º) De II:  $24 = a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y \rightarrow 2^3 \cdot 3 = a \cdot \frac{3^y}{2^y} \rightarrow \boxed{a = 2^{3+y} \cdot 3^{1-y}} \quad (4)$

5º) De III:  $81 = a \left(\frac{3}{2}\right)^z \rightarrow \boxed{a = 2^z \cdot 3^{4-z}} \quad (5)$

Em (3), como  $a \in \mathbb{N} \rightarrow \boxed{x = 0} \rightarrow a = 2^4 \cdot 3^0 \rightarrow \boxed{a = 2^4}$

Em (4),  $a = 2^4 = 2^{3+y} \cdot 3^{1-y} \rightarrow \boxed{y = 1}$

Em (5),  $a = 16 = 2^z \cdot 3^{4-z} = 2^4 \rightarrow \boxed{z = 4}$

Assim, a PG é; 16, 24, 36, 54, 81 (Total de 5 termos)

**2º Caso:** Se  $r < 1 \rightarrow$  Temos uma PG decrescente

Faça então (IV)  $\begin{cases} 16 = a \cdot r^k \\ (V) \quad 24 = a \cdot r^\ell \\ (VI) \quad 81 = a \cdot r^t \end{cases}$ , com  $k > \ell > t \geq 0$

Faça  $r = \frac{p}{q}$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}_+^* / \text{mdc}(p, q) = 1$ . Assim:

1º) Dividindo (IV) por (V):  $\frac{16}{24} = r^{k-\ell} = \left(\frac{p}{q}\right)^{k-\ell} = \frac{2}{3} \rightarrow$

$\rightarrow p = 2, q = 3, k - \ell = 1 \text{ e } r = \frac{2}{3}$

2º) De IV:  $2^4 = a \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \rightarrow \boxed{a = 2^{4-k} \cdot 3^k} \quad (6)$

3º) De V:  $2^3 \cdot 3 = a \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \rightarrow \boxed{a = 2^{3-\ell} \cdot 3^{1+\ell}} \quad (7)$

4º) De VI:  $81 = a \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t \rightarrow \boxed{a = 2^{-t} \cdot 3^{t+4}} \quad (8)$

Em (8), como  $a \in \mathbb{N} \rightarrow \boxed{t = 0} \rightarrow \boxed{a = 3^4}$

Em (7),  $a = 3^4 = 2^{3-\ell} \cdot 3^{1+\ell} \rightarrow \boxed{\ell = 3}$

Em (6),  $a = 3^4 = 2^{4-k} \cdot 3^k \rightarrow \boxed{k = 4}$

Assim, obtemos a PG: 81, 54, 36, 24, 16 (Total de 5 termos)

**Conclusão:** Os números 16, 24 e 81 estão numa PG de números naturais com 5 termos.

6ª QUESTÃO

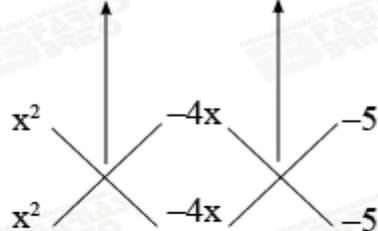
Seja o polinômio  $q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$  que possui valor mínimo igual a  $-64$ , onde  $k$  é uma constante real. Determine as raízes de  $q(x)$ .

 **Comenta**

**POLINÔMIOS**

De acordo com o enunciado, temos:

$g(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$



Com isso:

$g(x) = (x^2 - 4x - 5)^2 + k$

Como o valor mínimo de  $g(x)$  é igual a  $-64$ , teremos:

$(x^2 - 4x - 5)^2 \geq 0 \quad (+k)$

$(x^2 - 4x - 5)^2 + k \geq k$

Logo:

$g(x) \geq k \longrightarrow q_{\text{MIN}}(x) = k$

Portanto:

$k = -64$

Então, o polinômio será:

$$g(x) = (x^2 - 4x - 5)^2 - 64 = 0$$

$$(x^2 - 4x - 5)^2 = 64$$

$$x^2 - 4x - 5 = \pm 8$$

Concluimos que:

$$x^2 - 4x - 5 = 8; x^2 - 4x - 5 = -8$$

$$x^2 - 4x - 13 = 0; x^2 - 4x + 3 = 0$$

raízes: 1 e 3

$$x^2 - 4x = 13 (+4)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 17$$

$$(x - 2)^2 = 17$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{17}$$

$$x = 2 \pm\sqrt{17}$$

O conjunto solução:

$$S = \{1; 3; 2 \pm\sqrt{17}\}$$

## 7ª QUESTÃO

Determine todas as soluções da equação

$$4 \operatorname{sen}^2(7x) \cdot \cos(2x) + 2 \operatorname{sen}(9x) + 8 \operatorname{sen}^2(x) + 5 \cos(2x) + 2 \operatorname{sen}(5x) = 4$$

no intervalo  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ .



**Comenta**

### EQUAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

De acordo com o enunciado, temos:

$$4 \cdot \operatorname{sen}^2 7x \cdot \cos 2x + \underbrace{2 \cdot \operatorname{sen} 9x}_{2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 7x \cdot \cos 2x} + 8 \cdot \operatorname{sen}^2 x + 5 \cdot \cos 2x + \underbrace{2 \cdot \operatorname{sen} 5x}_{2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x} = 4$$

$$4 \cdot \operatorname{sen}^2 7x \cdot \cos 2x + 2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 7x \cdot \cos 2x + \cancel{8} \cdot \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + 5 \cdot \cos 2x = 4$$

$$4 \cdot \operatorname{sen}^2 7x \cdot \cos 2x + 4 \cdot \operatorname{sen} 7x \cdot \cos 2x + \cancel{4} - 4 \cos 2x + 5 \cdot \cos 2x - \cancel{4} = 0$$

Segue que

$$\cos 2x \cdot (4 \operatorname{sen}^2 7x + 4 \cdot \operatorname{sen} 7x + 1) = 0$$

$$\cos 2x \cdot (2 \operatorname{sen} 7x + 1)^2 = 0.$$

Aplicando a Lei do Anulamento do Produto, temos dois casos:

$$I. \cos 2x = 0 \rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ k inteiro.}$$

Como  $x$  pertence  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ , devemos ter:

$$k = 3 \text{ ou } k = 4 \rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{4}}$$

$$II. 2\sin 7x + 1 = 0 \rightarrow \sin 7x = -\frac{1}{2}$$

Podemos ter:

$$7x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{7}$$

ou

$$7x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{11\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}$$

Como  $x$  pertence  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ , devemos ter:

$$k = 5 \rightarrow \boxed{x = \frac{67\pi}{42}} \text{ ou } \boxed{x = \frac{71\pi}{42}}$$

$$k = 6 \rightarrow \boxed{x = \frac{79\pi}{42}} \text{ ou } \boxed{x = \frac{83\pi}{42}}$$

Portanto, o conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{4}, \frac{67\pi}{42}, \frac{71\pi}{42}, \frac{79\pi}{42}, \frac{83\pi}{42} \right\}$$

## 8ª QUESTÃO

A reta  $r$  é normal à cônica  $C$ , de equação  $9x^2 - 4y^2 = 36$ , no ponto  $A = \left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$  e intercepta o eixo das abscissas no ponto  $B$ . Sabendo que  $F$  é o foco da cônica  $C$  mais próximo ao ponto  $A$ , determine a área do triângulo  $ABF$ .



## GEOMETRIA ANALÍTICA – HIPÉRBOLE

$$1. \quad A \in C: 9 \cdot 3^2 - 4 \cdot \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 9 \cdot 9 - 9 \cdot 5 = 9 \cdot 4 = 36.$$

2. Tangente a C por A:  $9x \cdot 3 - 4y \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = 36 \Rightarrow 9x - 2\sqrt{5}y - 12 = 0$ .

Daí, r:  $2\sqrt{5}x + 9y = 2\sqrt{5} \cdot 3 + 9 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow r: 4\sqrt{5}x + 18y - 39\sqrt{5} = 0$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A \in r}$

3. B:  $y = 0$  em r dá  $x_B = \frac{39}{4} \Rightarrow B = \left(\frac{39}{4}, 0\right)$

4. C:  $\frac{x^2}{\textcircled{4}} - \frac{y^2}{\textcircled{9}} = 1 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13} \Rightarrow F = (\sqrt{13}, 0)$

$a^2 \quad b^2$

5.  $[ABF] = \frac{BF \cdot y_A}{2} = \frac{\left(\frac{39}{4} - \sqrt{13}\right) \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{(39 - 4\sqrt{13})3\sqrt{5}}{16}$

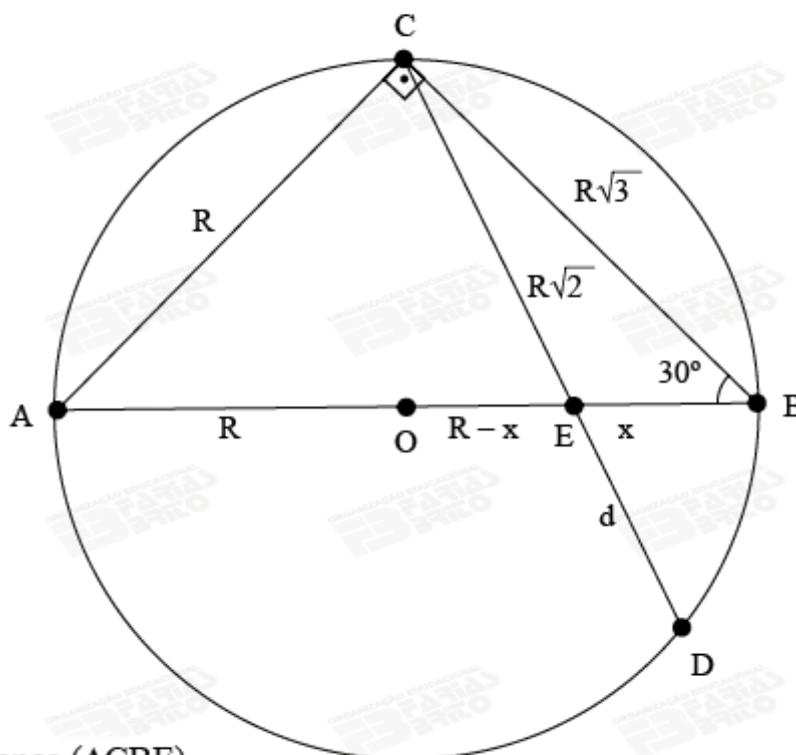
9ª QUESTÃO

Uma corda CD corta o diâmetro AB de um círculo de raio R no ponto E. Sabendo que o ângulo  $\widehat{ABC} = 30^\circ$  e que  $\overline{EC} = R\sqrt{2}$ , calcule a medida do segmento  $\overline{ED}$ .

 **Comenta**

**GEOMETRIA PLANA**

Diante do exposto, temos a ilustração a seguir.



i. Lei dos cossenos ( $\Delta CBE$ )

$$(R\sqrt{2})^2 = (R\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \cdot R\sqrt{3} \cdot x \cos 30^\circ \longrightarrow 2R^2 = 3R^2 + x^2 - 3Rx$$

$$x^2 - 3Rx + R^2 = 0 \longrightarrow x = \frac{3R - R\sqrt{5}}{2}$$

ii. Aplicando a Lei das cordas, concluímos:

$$d \cdot R\sqrt{2} = x \cdot (2R - x)$$

$$d \cdot R\sqrt{2} = \left(\frac{3R - R\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{R + R\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$d \cdot \sqrt{2} = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) R$$

$$d \cdot \sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) R$$

$$d = \left(\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{4}\right) R$$

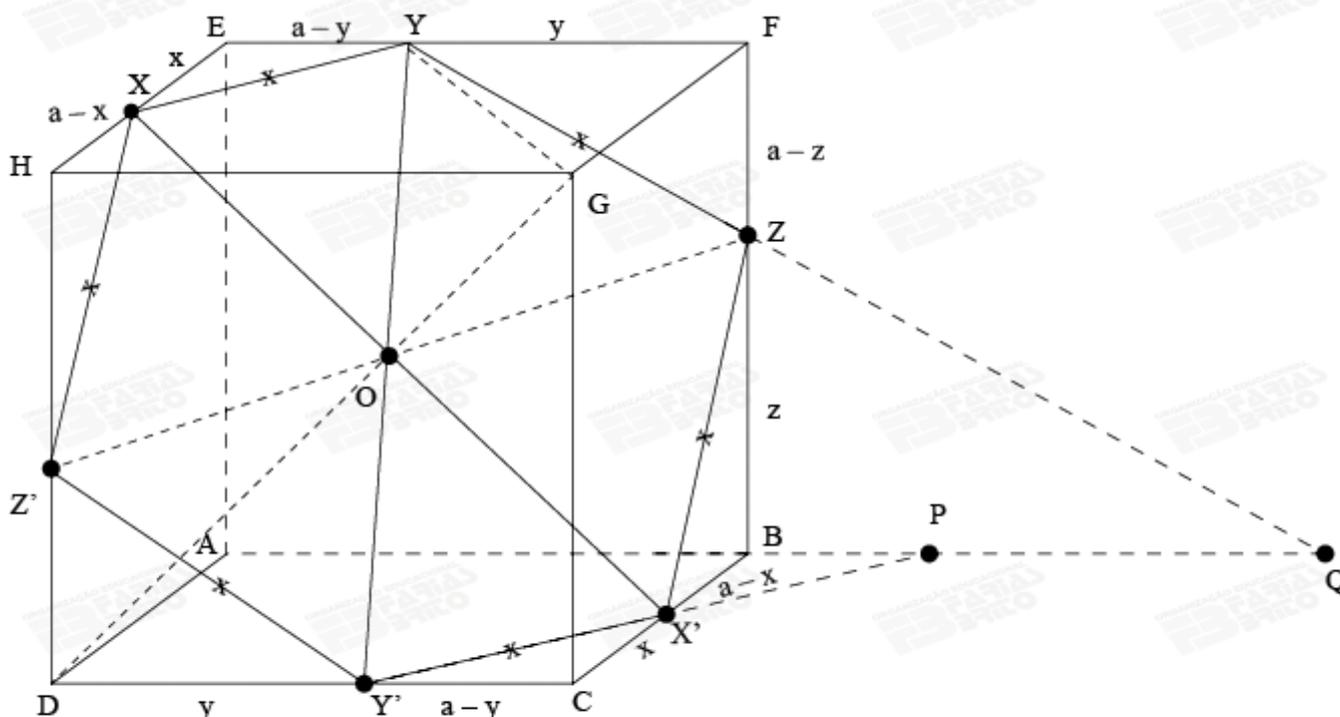
### 10ª QUESTÃO

Um cubo com diagonal principal  $\overline{AG}$  é interceptado pelo plano  $\alpha$ , perpendicular à  $\overline{AG}$ , formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta  $a$  do cubo:

- o apótema dessa seção hexagonal;
- o raio da esfera que é tangente a essa seção e às faces do cubo que contém o vértice  $A$ .

### Comenta

## GEOMETRIA ESPACIAL



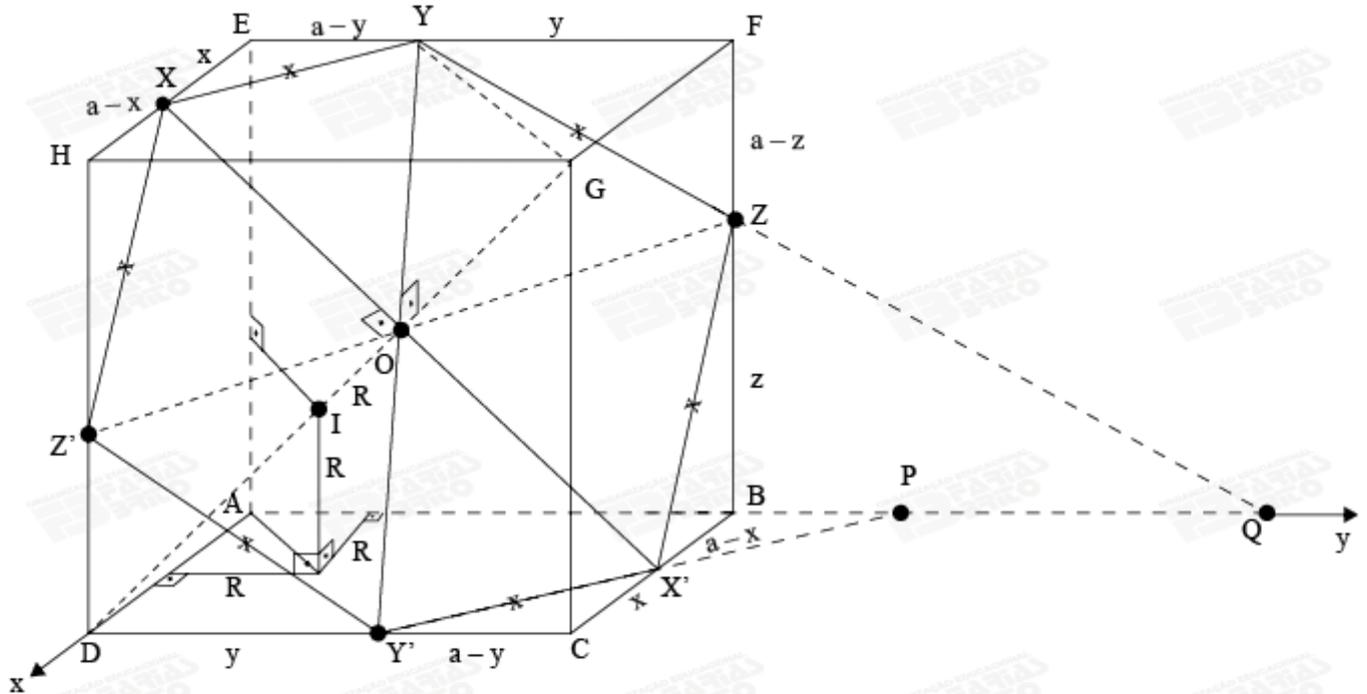
Inicialmente, vamos mostrar que a seção hexagonal regular deve intersectar as arestas em seus pontos médios.

Por ser regular,  $XY = X'Y'$  e  $XY \parallel X'Y'$ . Logo  $EX = CX'$  e  $EY = CY'$ .

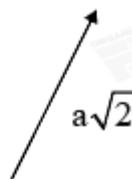
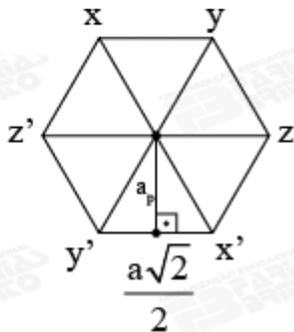
Como a reta  $\overline{AB}$  só corta o plano do hexágono uma única vez,  $P = Q$  e  $\Delta PX'Z$  é equilátero (pois seus ângulos são os externos do hexágono). Isso dá congruência entre os triângulos  $X'CY'$  e  $X'BP$ , que resulta em  $x = a/2$ .

Analogamente,  $y = \frac{a}{2}$ ,  $z = \frac{a}{2}$ .

Agora, vamos mostrar que essa seção é perpendicular à diagonal  $AG$ . De fato,  $OG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $OY = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $YG = \frac{a\sqrt{5}}{2}$  garantem  $G\hat{O}Y = 90^\circ$ .



a) Seção:



$$\text{Apótema} = a_p = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

b) Adotando sistema de coordenadas com origem A, queremos um ponto  $I(R, R, R)$

( $R$ : raio da esfera pedida) tal que  $IO$  também seja  $R$ . Assim  $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} - R$ :

$$R^2 + R^2 + R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - R\right)^2 \rightarrow 2R^2 + a\sqrt{3}R - \frac{3a^2}{4} = 0 \rightarrow \Delta = 9a^2$$

$$\text{Logo, } R = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{4}.$$

3º DIA

Física

1ª QUESTÃO

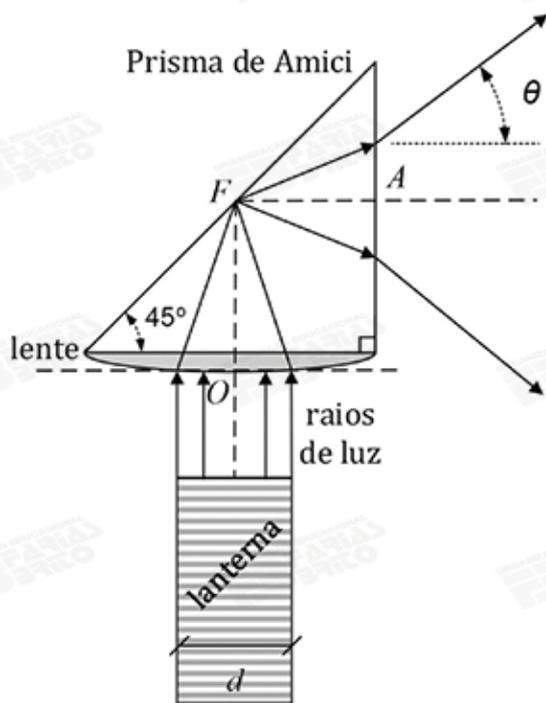


Figura 1

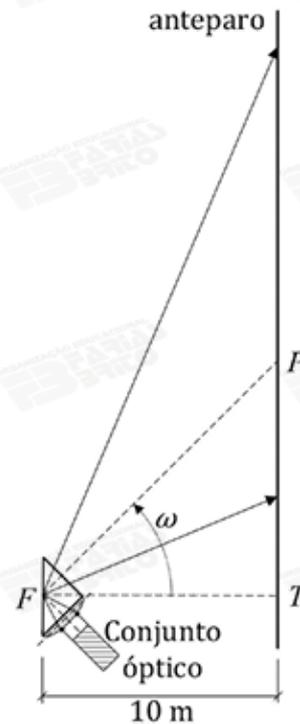


Figura 2

Um conjunto óptico é formado por uma lente convergente e um **prisma de Amici**, conforme mostra a Figura 1. O conjunto está totalmente integrado, sendo formado pelo mesmo vidro. A lente possui centro óptico  $O$  e foco  $F$  situado sobre a face-hipotenusa do prisma. Nesse prisma, os raios incidentes sobre a face-hipotenusa sofrem reflexão interna total. Uma lanterna cilíndrica muito potente, com potência óptica de  $P = \pi\sqrt{3}$  W e diâmetro  $d = 10$  cm, gera raios de luz paralelos ao eixo principal da lente. A lanterna está solidária ao sistema óptico e seus raios são focalizados pela lente e refletidos pelo prisma, até a sua face-cateto plana, saindo do prisma e projetando a luz sobre um anteparo plano alinhado verticalmente. Conforme mostra a Figura 2, no intervalo  $0 \leq t < 12$  s, todo o conjunto óptico começa a girar, a partir do instante em que  $P$  coincide com  $T$ , em velocidade angular constante  $\omega = \pi/36$  rad/s. Dessa forma, o contorno da luz projetada no anteparo passa a ser uma curva plana, conhecida na matemática.

Diante do exposto, determine:

- a) o ângulo de abertura  $\theta$  do cone formado na saída do prisma, quando o índice de refração do conjunto óptico é o mínimo para que o feixe luminoso seja totalmente refletido na face-hipotenusa;

- b) a expressão da velocidade escalar  $v(t)$  com que o ponto  $P$  (interseção do eixo do cone com o anteparo) desloca-se verticalmente ao longo do anteparo; e
- c) a densidade de potência, em  $\text{W/m}^2$ , da luz projetada no anteparo, em  $t = 9$  s. Neste caso, considere que todas as dimensões do prisma são muito pequenas em relação à distância para o anteparo, ou seja, o ângulo de abertura é  $\theta$  ao longo de todo o cone de saída, a partir de  $F$ .

Dados:

- o meio externo é o ar:  $n_1 = 1$ ;
- $\overline{OF} = \overline{FA} = 5(1 + 2\sqrt{2})$  cm; e
- a separação horizontal entre o foco  $F$  da lente e o anteparo, no ponto  $T$ , é  $\overline{FT} = 10$  m.

Observação:

- a linha  $\overline{FP}$ , prolongamento de  $\overline{FA}$ , é o eixo do cone;
- o ângulo  $\theta$  é o ângulo entre o eixo e qualquer geratriz do cone de luz de saída do prisma; e
- desconsidere qualquer perda da intensidade luminosa ao longo de todo o percurso até o anteparo.

**Comenta**

**ÓPTICA**

- a) Índice de refração do conjunto óptico mínimo para que o feixe luminoso seja totalmente refletido na face hipotenusa:

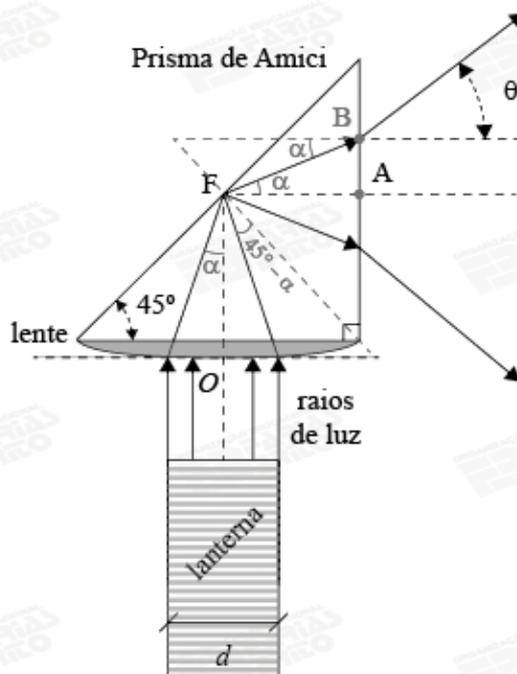


Figura 1

I. Lei de Snell para o ângulo limite (ponto F)

O ângulo limite é  $L = 45 - \alpha$

$$n = \frac{1}{\text{sen } L} \Rightarrow n = \frac{1}{\text{sen}(45 - \alpha)}$$

II. Lei de Snell no ponto A.

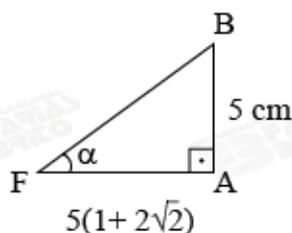
$$n_{\text{ar}} \cdot \text{sen} \theta = n \cdot \text{sen} \alpha$$

$$\text{sen} \theta = \frac{1}{\text{sen}(45 - \alpha)} \cdot \text{sen} \alpha$$

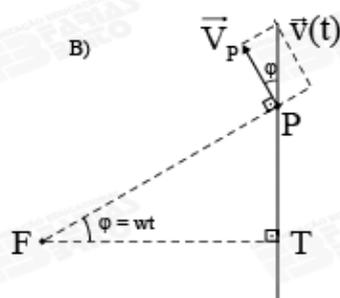
$$\text{sen} \theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cotg \alpha - 1)}$$

$$\text{sen} \theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left( \frac{\cancel{z} + 10\sqrt{2}}{\cancel{z}} - 1 \right)} = \frac{1}{2}$$

Logo:  $\theta = 30^\circ$



b)



$$V(t) = \frac{V_p}{\cos \varphi} = \frac{\omega \cdot \overline{FP}}{\frac{\overline{FT}}{\overline{FP}}}$$

$$V(t) = \frac{\omega}{\overline{FT}} \cdot (\overline{FP})^2 = \frac{\omega}{\overline{FT}} \left[ (\overline{FT})^2 + (\overline{TP})^2 \right] \quad (I)$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{\overline{TP}}{\overline{FT}} \Rightarrow \overline{TP} = \overline{FT} \cdot \text{tg}(\omega t) \quad (II)$$

(II) em (I):

$$V(t) = \frac{\omega}{\overline{FT}} \left[ (\overline{FT})^2 + (\overline{FT})^2 \cdot \text{tg}^2(\omega t) \right] = \frac{\omega \cdot (\overline{FT})^2}{\overline{FT}} \cdot [1 + \text{tg}^2(\omega t)]$$

$$\omega = \frac{\pi}{36} \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \overline{FT} = 10 \text{ m}$$

$$V(t) = \frac{\pi}{36} \cdot 10^2 \cdot \left[ 1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{36} \cdot t\right) \right]$$

$$V(t) = \frac{5\pi}{18} \cdot \left[ 1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{36} \cdot t\right) \right] \text{ m/s}$$

c)

I. para acharmos o semieixo “a”, podemos simplesmente fazer a média aritmética das alturas.

$$a = \frac{10 \cdot [\text{tg}(45^\circ + 30^\circ) - \text{tg}(45^\circ - 30^\circ)]}{z}$$

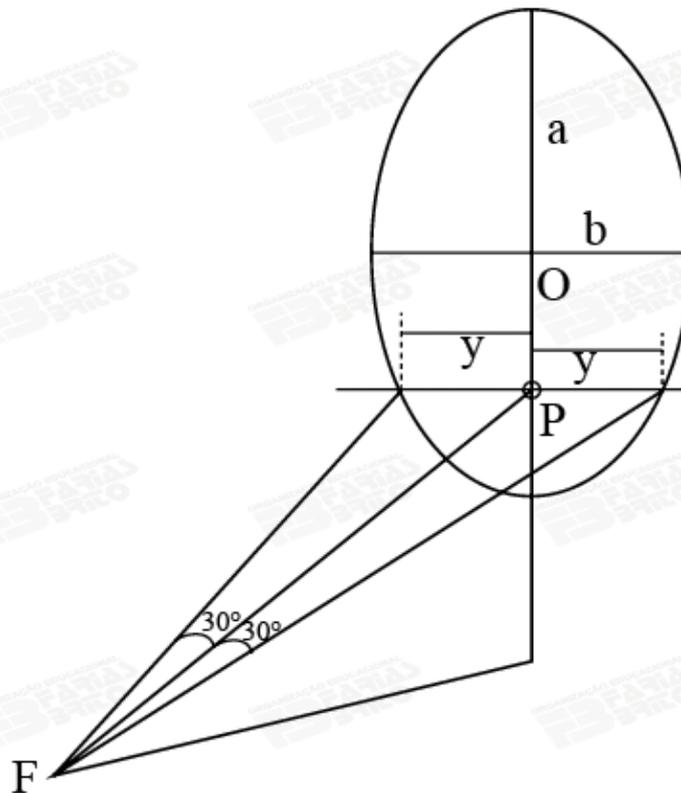
$$a = \frac{5}{z} (\cancel{z} + 6\sqrt{3} + \cancel{z} - \cancel{z} + 6\sqrt{3} - \cancel{z})$$

$$a = \frac{5}{6}(\cancel{\theta} + 6\sqrt{3} + \cancel{\beta} - \cancel{\theta} + 6\sqrt{3} - \cancel{\beta})$$

$$a = \frac{5}{6}(12\sqrt{3})$$

$$a = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

- II. para acharmos o semieixo “b”, precisamos de um ponto genérico da elipse. Para o centro da circunferência gerada pelo cone de luz, temos:



$$y = \overline{FP} \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$y = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ m}$$

- III. sabendo que a equação da elipse é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Fazendo o ponto O (0;0), a equação acima fica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



IV. substituindo na equação da elipse, temos:

$$\frac{(-10)^2}{(10\sqrt{3})^2} + \frac{\left(\frac{10\sqrt{6}}{3}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{100}{100 \cdot 3} + \frac{100 \cdot 6}{9b^2} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{200}{3b^2} = 1$$

$$\frac{200}{3b^2} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{200}{3b^2} = \frac{2}{3}$$

$$b^2 = 100 \rightarrow \boxed{b = 10 \text{ m}}$$

V. para a área da elipse  $A = \pi \cdot a \cdot b$ ,

$$A = \pi \cdot 10\sqrt{3} \cdot 10\text{m}^2$$

$$\boxed{A = 100\sqrt{3} \pi \text{ m}^2}$$

VI. tendo posse dos valores acima, a densidade superficial de potência:

$$\sigma = \frac{P_{ot}}{A}$$

$$\sigma = \frac{\pi\sqrt{3}}{100\sqrt{3}\pi} \text{ W/m}^2$$

$$\sigma = \frac{1}{100} \text{ W/m}^2$$

$$\boxed{\sigma = 1 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2}$$

2ª QUESTÃO

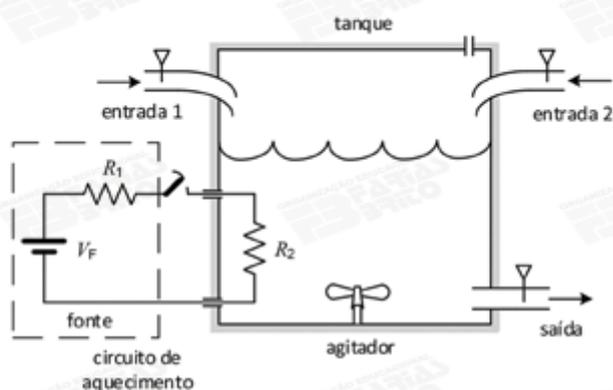


Figura 1

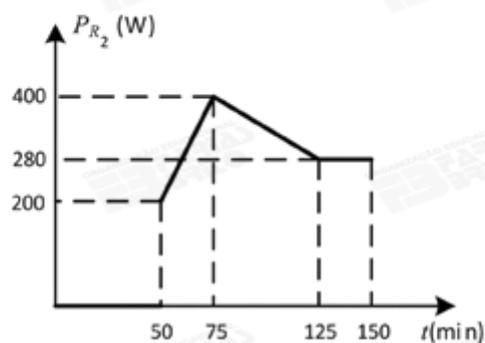


Figura 2

A Figura 1 ilustra um tanque industrial contendo duas entradas e uma saída, além de um circuito de aquecimento. A temperatura do líquido no interior do tanque deve ser controlada, a fim de alimentar o processo industrial conectado na saída do tanque. O agitador mistura continuamente os líquidos que chegam pelas entradas, de maneira que o volume total de líquido dentro do tanque esteja sempre numa única temperatura. A perda térmica do tanque pode ser desprezada.

Considere o tanque inicialmente vazio, com a válvula de saída fechada e o sistema de aquecimento desligado. Em  $t = 0$  a válvula da entrada 1 é aberta com uma vazão de água de 1 L/min à temperatura de 10 °C e a válvula da entrada 2 com uma vazão de água de 0,25 L/min à temperatura de 30 °C. Nessas condições, determine:

- a temperatura da água no interior do tanque em  $t = 50$  min;
- a temperatura da água no interior do tanque em  $t = 150$  min, se o circuito de aquecimento é ligado em  $t = 50$  min e a potência dissipada na resistência  $R_2$ ,  $P_{R_2}$ , varia de acordo com o gráfico da Figura 2; e
- a tensão  $V_F$  que deverá ser ajustada na fonte para manter a temperatura da água na saída em 22 °C após um longo tempo de funcionamento do sistema ( $t \gg 150$  min), sabendo que a válvula da entrada 2 foi fechada, o volume no interior do tanque encontra-se nessa mesma temperatura de 22 °C e a válvula de saída foi aberta com a mesma vazão da válvula da entrada 1.

Dados:

- $R_1 = 2 \Omega$ ;
- $R_2 = 10 \Omega$ ;
- 1 cal = 4,2 J;
- calor específico da água ( $c$ ) = 1 cal/g °C; e
- densidade da água = 1 kg/L.



## CALORIMETRIA – CIRCUITO ELÉTRICO

a) Para  $0 < t \leq 50$  min, o aquecedor está desligado.

$$T_{eq} = \frac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2}{m_1 + m_2} \text{ (temperatura de equilíbrio para misturas de líquidos iguais)}$$

Dividindo por  $\Delta t$ , temos:

$$T_{eq} = \frac{\left(\frac{m_1}{\Delta t}\right) \cdot T_1 + \left(\frac{m_2}{\Delta t}\right) \cdot T_2}{\left(\frac{m_1}{\Delta t}\right) + \left(\frac{m_2}{\Delta t}\right)}$$

$$T_{eq} = \frac{z_1 \cdot T_1 + z_2 \cdot T_2}{z_1 + z_2}; \text{ onde: } z = \text{vazão.}$$

$$T_{eq} = \frac{1 \cdot 10 + 0,25 \cdot 30}{1 + 0,25}$$

$$T_{eq} = 14 \text{ } ^\circ\text{C}$$

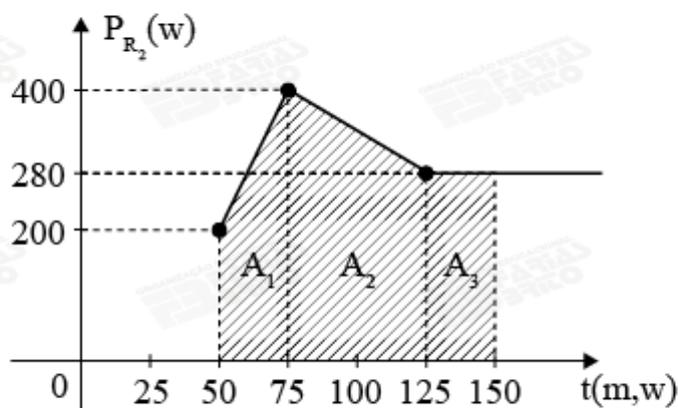
b) Para  $50 \text{ min} < t \leq 150 \text{ min}$ , a válvula de saída ainda está fechada.

i) Quanto de água tem no tanque no final dos 150 min.

$$V_T = Z_T \cdot \Delta t \therefore V_T = \frac{1,25 \ell}{\text{min}} \cdot 150 \text{ min}$$

$$V_T = 187,5 \ell \Rightarrow m_T = 187,5 \text{ kg}$$

ii) Quanto de calor foi dado para a água



$Q = \text{área do gráfico}$

$$Q = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_1 = \frac{(400 + 200) \cdot 25 \cdot 60}{2}$$

$$A_1 = \frac{(400 + 280) \cdot 50 \cdot 60}{2}$$

$$A_3 = 280 \cdot 25 \cdot 60$$

$$Q = 600 \cdot 25 \cdot 30 + 680 \cdot 50 \cdot 30 + 280 \cdot 25 \cdot 60$$

$$Q = 1,89 \cdot 10^6 \text{ J}$$

- iii) Admitindo que todo o calor gerado pelo aquecedor seja usado para o aquecimento da água:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

$$1,89 \cdot 10^6 = 187,5 \cdot 10^3 \cdot 4,2 \cdot (T_F - 14)$$

$$T_F - 14 = \frac{1,89 \cdot 10^6}{187,5 \cdot 10^3 \cdot 4,2} = 2,4$$

$$\boxed{T_F = 16,4 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

- c) No regime estacionário, o resistor deverá aquecer o volume de líquido que entra:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

$$Q = Z \cdot \Delta t \cdot c \cdot \Delta T$$

$$\frac{Q}{\Delta t} = Z \cdot c \cdot \Delta T$$

$$P_{OT} = \frac{1000 \cancel{\text{g}}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{4,2 \text{ J}}{\cancel{\text{g}} \cancel{^\circ\text{C}}} \cdot 12 \cancel{^\circ\text{C}}$$

$$\boxed{P_{OT} = 840 \text{ W}}$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot i^2 \Rightarrow 840 = 10 \cdot i^2$$

$$\boxed{i = \sqrt{84} \cdot \text{A}}$$

$$\text{Para o circuito: } i = \frac{V_F}{R_{eq}}$$

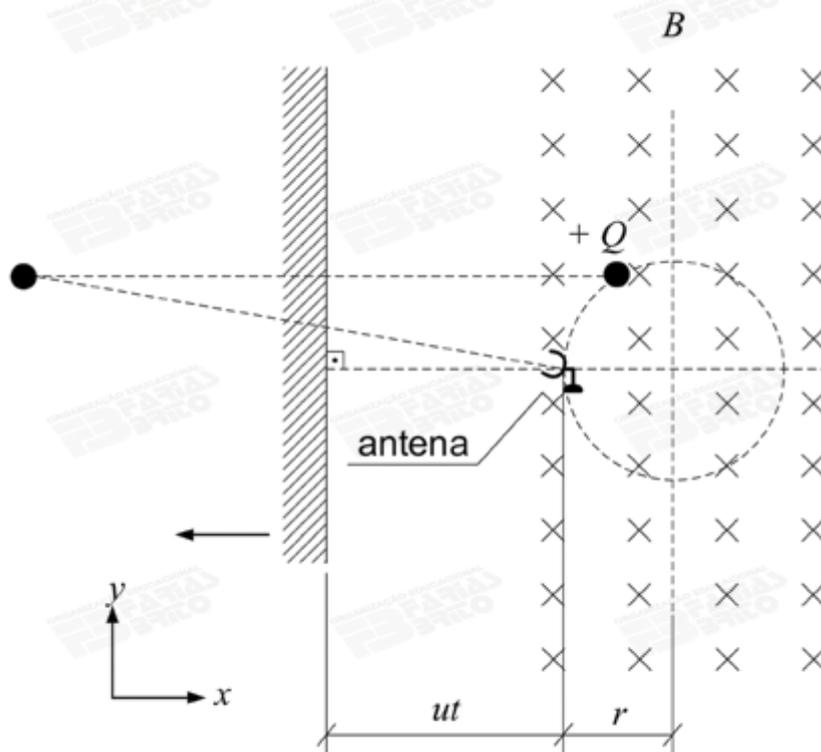
$$V_F = 12 \cdot \sqrt{84}$$

$$\boxed{V_F = 24 \cdot \sqrt{21} \text{ V}}$$

$$V_F \cong 24 \cdot 4,58$$

$$\boxed{V_F = 110 \text{ V}}$$

3ª QUESTÃO



Uma partícula carregada efetua um movimento circular na região onde há um campo magnético, conforme mostra a figura. Durante todo o movimento, uma antena situada no ponto mais à esquerda da trajetória acompanha rigorosamente a imagem da partícula refletida em um espelho plano, que se desloca para a esquerda em velocidade constante, conforme mostra a figura. Em função do tempo  $t$  e dos dados da questão, determine:

- as componentes  $x$  e  $y$  da posição da imagem da partícula em relação à antena;
- as componentes  $x$  e  $y$  da velocidade da imagem da partícula; e
- a velocidade angular da antena, a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores.

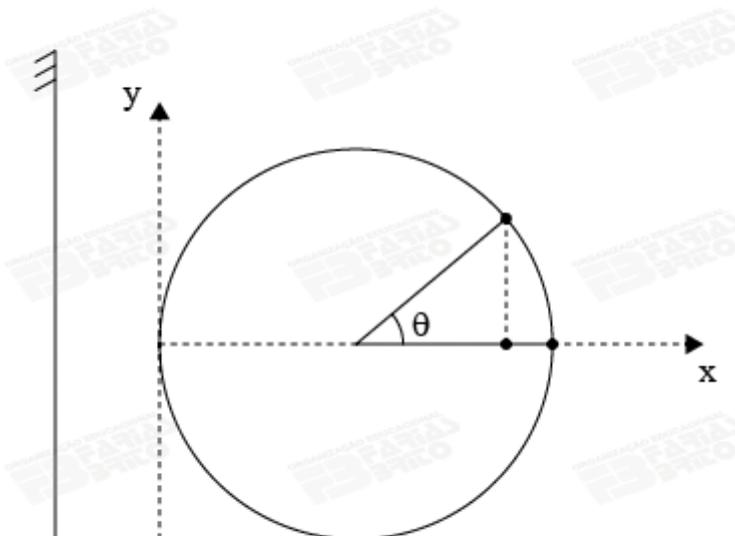
**Considerações:**

- no instante  $t = 0$ , a partícula está no ponto mais à direita da trajetória;
- no instante  $t = 0$ , o espelho parte da posição onde está situada a antena; e
- despreze o efeito gravitacional.

**Dados:**

- carga da partícula:  $+Q$ ;
- massa da partícula:  $m$ ;
- módulo da velocidade do espelho:  $u$ ;
- módulo da densidade de campo magnético da região:  $B$ ; e
- raio da trajetória:  $r$ .

### ÓPTICA/MAGNETISMO



Para a força

$$F_{\text{rcp}} = F_m \rightarrow m\omega^2 r = QvB \rightarrow m\omega^2 r = Q \phi / f B$$

$$\omega = \frac{QB}{m} \text{ e } V_\theta = \omega \cdot r \rightarrow V_\theta = \frac{QBr}{m}$$

O ângulo  $\theta$  pode ser escrito:

$$\theta = \omega t \rightarrow \theta = \frac{QB}{m} t$$

A) Observe que a componente da imagem pode ser escrita:

$$y_I = y_\theta \rightarrow y_\theta = r \text{sen} \theta \rightarrow y_\theta = r \text{sen} \left( \frac{QBt}{m} \right) \rightarrow y_I = r \text{sen} \left( \frac{QBt}{m} \right)$$

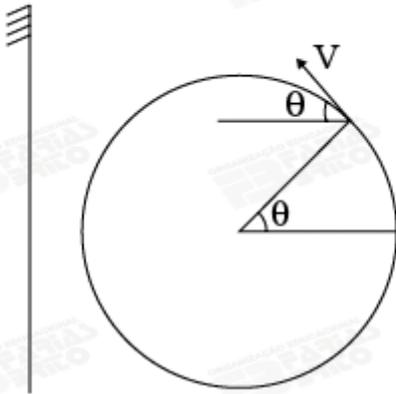
e

$$X_I = -2\mu t - X_\theta; X_\theta = r + r \cos \theta$$

$$X_\theta = r \left( 1 + \cos \left( \frac{QBt}{m} \right) \right)$$

$$X_I = -2\mu t - r \left( 1 + \cos \left( \frac{QBt}{m} \right) \right)$$

B)



A componente da velocidade paralela ao espelho permanece constante. Logo:

$$V_{\theta//} = V_{1//} \rightarrow V_{1//} = V \text{sen } \theta \rightarrow V_{1//} = V \text{sen} \left( \frac{QBt}{m} \right)$$

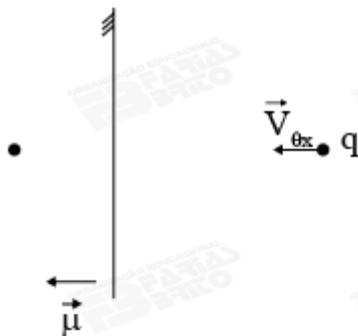
$$V_{1//} = V_{ly} \rightarrow V_{ly} = V \text{sen} \left( \frac{QBt}{m} \right)$$

$$\vec{V}_{ly} = \frac{QBr}{m} \text{sen} \left( \frac{QBt}{m} \right) \mathbf{j}$$

Chamando:

$$\frac{QBr}{m} = \gamma \text{ e } \frac{QBt}{m} = \varphi$$

A componente na direção perpendicular ao espelho ( $V_{ix}$ ) pode ser calculada.

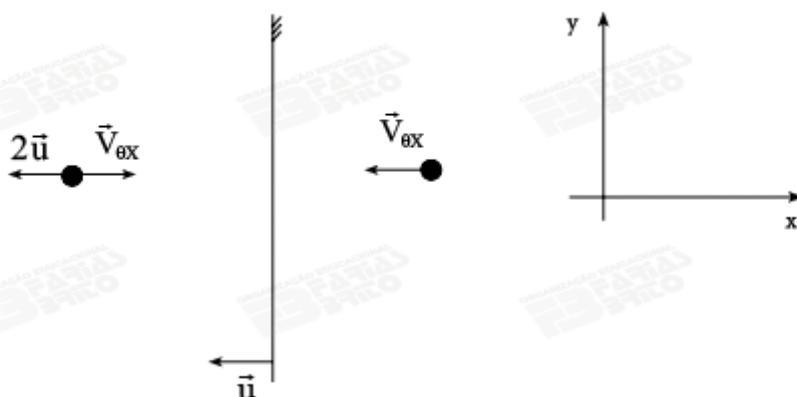


Para o referencial do espelho, temos:



Onde  $V_{ix, E}$  é a velocidade da imagem em relação ao espelho.

Voltando para o referencial da antena, temos:



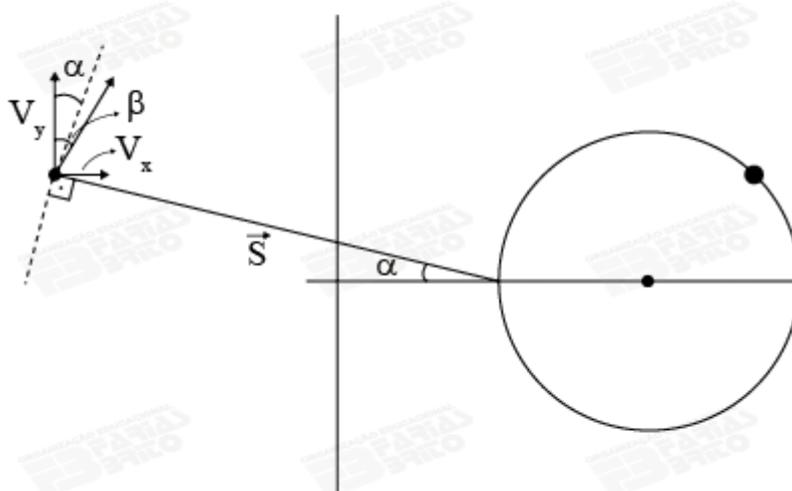
$$|\vec{V}_{\theta x}| = V \cos \theta \rightarrow |\vec{V}_{\theta x}| = \gamma \cos \varphi$$

$$\vec{V}_{Ix} = (\gamma \cos \varphi - 2u)i$$

C) A velocidade e a posição podem ser escritas

$$\vec{V}_I = (\gamma \cos \varphi - 2\mu)i + \gamma \text{sen } \varphi j$$

$$\vec{S} = (-2\mu t - r(1 + \cos \varphi))i + r \text{sen } \varphi j$$



Os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser calculados com a velocidade e posição.

$$\text{tg } \beta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\gamma \cos \varphi - 2\mu}{\gamma \text{sen } \varphi}$$

$$\text{tg } \beta = \cotg \varphi - \frac{2\mu}{\gamma} \text{cosec } \varphi$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{r \text{sen } \varphi}{2\mu t + r(1 + \cos \varphi)}$$

A velocidade angular será:

$$\omega = \frac{|\vec{v}| \cos(\beta - \alpha)}{|\vec{s}|}$$

os módulos podem ser calculados:

$$|\vec{V}| = \sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi - 4\mu\gamma \cos \varphi + 4\mu^2 + \gamma^2 \sin^2 \varphi}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\gamma^2 - 4\mu\gamma \cos \varphi + 4\mu^2}$$

e

$$|\vec{S}| = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + (2\mu t + r - r \cos \varphi)^2}$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{(2r^2 + 4\mu t r)(1 - \cos \varphi) + 4\mu^2 t^2}$$

Substituindo :

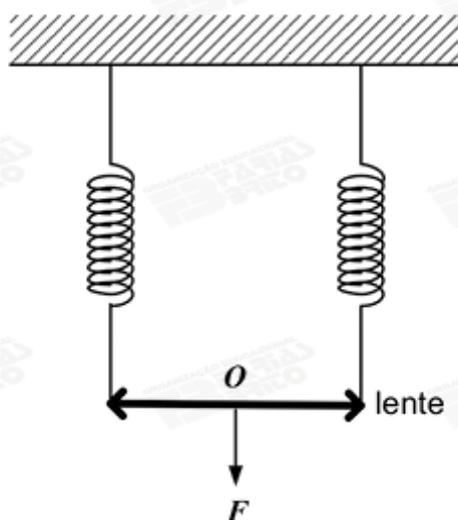
$$\omega = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\mu\gamma \cos \varphi + 4\mu^2}}{\sqrt{(2r^2 + 4\mu t r)(1 - \cos \varphi) + 4\mu^2 t^2}} \cos(\beta - \alpha)$$

onde :

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left( \cotg \varphi - \frac{2\mu}{\gamma} \text{cosec} \varphi \right)$$

$$\text{e } \alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{r \text{sen} \varphi}{2\mu t + r(1 + \cos \varphi)} \right)$$

#### 4ª QUESTÃO



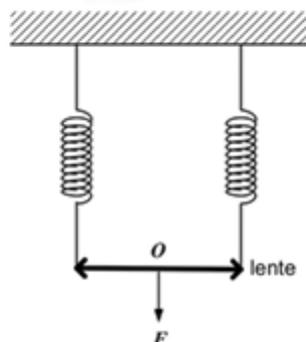
Como mostra a figura, uma lente convergente, que está pendurada no teto por duas molas ideais de constante elástica  $k$ , é submetida a uma força vertical  $F$  para baixo. Determine:

- para que valores de  $F$  a lente produz uma imagem real de uma figura colada no teto; e
- o valor de  $F$  para o qual a imagem real tem o dobro do tamanho da figura colada no teto.

#### Dados:

- distância entre o centro óptico da lente e o teto para  $F = 0$ :  $d$ ; e
- distância focal da lente:  $f = 3d$

## ÓPTICA/TRABALHO E ENERGIA



- a) Para a imagem ser real, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'} \Rightarrow \frac{1}{P'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{P}; \text{ para real } P' > 0$$

$$P' > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} - \frac{1}{P} > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} > \frac{1}{P} \Rightarrow \boxed{P > f}$$

$$\boxed{P > 3d}$$

Considerando que exista equilíbrio a cada ponto, temos que a variação de comprimento será:

$$\Delta x = 3d - d = 2d.$$

Logo,

$$F = 2k\Delta x = 4kd.$$

Portanto, a força deve ser maior que  $4kd$ .

- b) O aumento será:

$$\frac{P'}{P} = \frac{|I|}{|O|} \Rightarrow \frac{P'}{P} = \frac{2d}{d} \Rightarrow \boxed{P' = 2P}$$

Para a lente, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{P} + \frac{1}{2P} = \frac{3}{2P}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{3}{2P} \quad \frac{1}{3d} = \frac{3}{2P} \Rightarrow \boxed{P = \frac{9d}{2}}$$

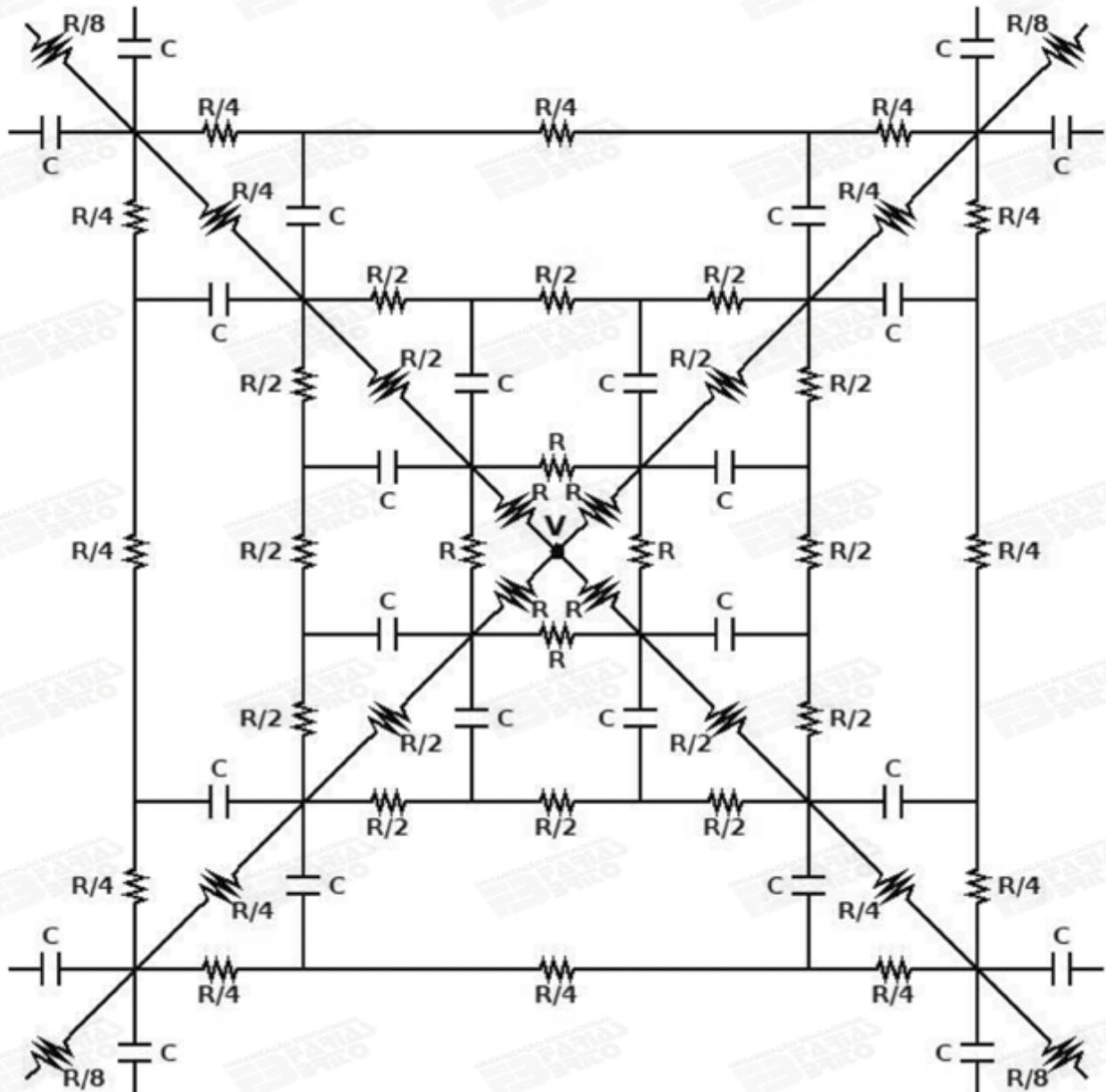
A deformação da mola:

$$\Delta x = \frac{9d}{2} - d = \frac{7d}{2}$$

No novo equilíbrio:

$$F = 2k \cdot \Delta x = 2k \cdot \frac{7d}{2} \Rightarrow \boxed{F = 7kd}$$

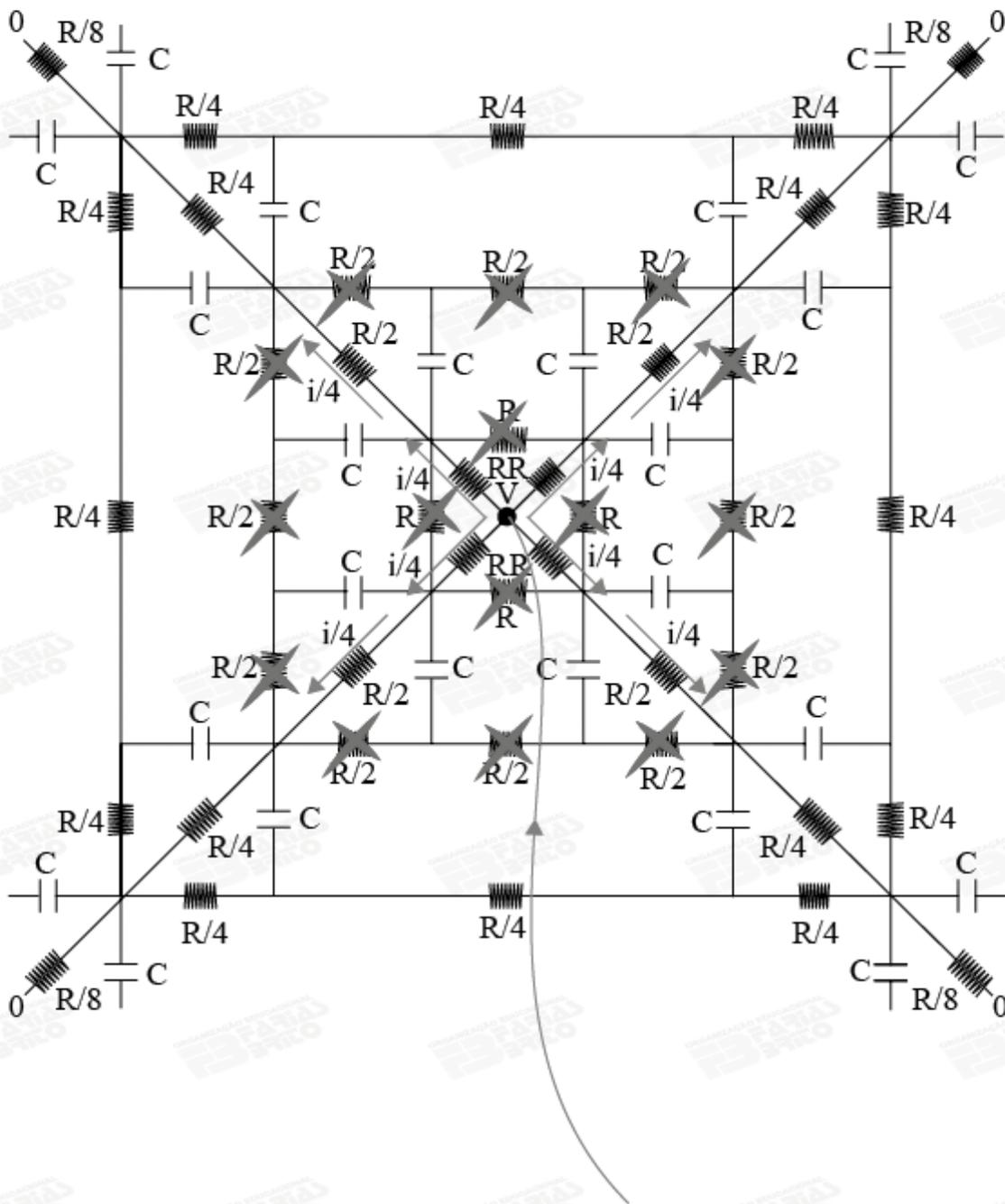
5ª QUESTÃO



O circuito da figura acima possui potencial  $V > 0$  em seu nó central. Esse circuito estende-se em direção ao infinito, com suas resistências sendo reduzidas à metade, gradativamente, e as capacitâncias todas iguais a  $C$ . Enquanto isso, o potencial vai se reduzindo também em direção ao infinito até atingir o valor nulo.

Considerando um tempo infinito de funcionamento do circuito, determine a energia total armazenada nos capacitores.

### CIRCUITOS



Pela simetria de circuitos, somente as resistências das diagonais restarão.

O restante estão em curto. Logo, a resistência equivalente ao longe de uma das diagonais é dada por:

$$R_{eq} = R + \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \dots = R \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

$$R_{eq} = R \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2R.$$

Logo, a queda de potencial no primeiro resistor é dada por:

$$V - V_1 = R \cdot \frac{V}{2R} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{V}{2}}$$

A queda de potencial no segundo resistor é dada por:

$$V_1 - V_2 = \frac{R}{2} \cdot \frac{V}{2R} = \frac{V}{4}$$

$$\frac{V}{2} - V_2 = \frac{V}{4} \therefore \boxed{V_2 = \frac{V}{4}}$$

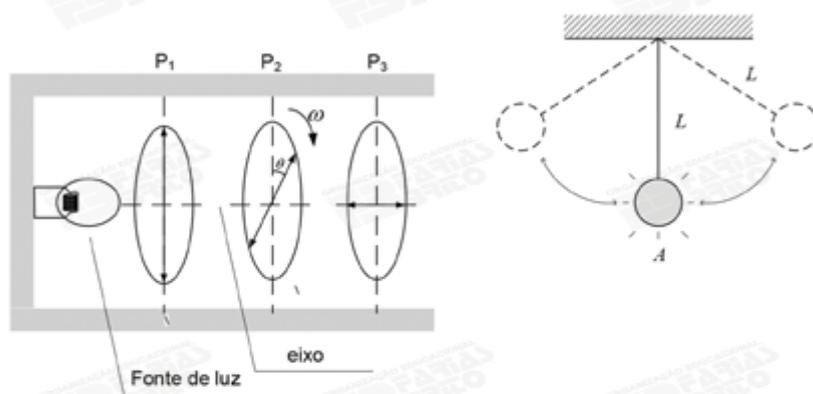
Analogamente,  $V_n = \frac{V}{2^n}$

Vamos calcular a energia dos capacitores em uma das diagonais.

$$\begin{aligned} E_{\text{tot(diagonal)}} &= \frac{1}{2} \cdot (2C) \left(\frac{V}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} (2C) \left(\frac{V}{8}\right)^2 + \dots \\ &= CV^2 \left[ \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right] = CV^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{CV^2}{4} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como temos quatro diagonais:  $E_{\text{tot}} = 4 \cdot E_{\text{tot(diagonal)}} = \frac{1}{3} CV^2$ .

### 6ª QUESTÃO



Um estroboscópio foi montado utilizando-se uma fonte de luz branca e três polarizadores, conforme mostra a figura. Os polarizadores  $P_1$  e  $P_3$  estão com seus planos de polarização ortogonais e o polarizador  $P_2$  gira com frequência angular constante  $\omega$ , em torno do eixo, e no sentido, conforme indicados na figura. Em um ambiente completamente escuro, a luz estroboscópica ilumina a massa de

um pêndulo simples sempre que ela passa no ponto A, indicado na figura, dando a impressão de que a massa está parada na posição inferior do pêndulo. Sabendo que a aceleração da gravidade é  $g$ , determine:

- a intensidade da luz estroboscópica em função do ângulo  $\theta$ , entre os planos de polarização de  $P_1$  e  $P_2$ ;
- o comprimento  $L$  do pêndulo.

**Dado:**

- intensidade máxima da luz estroboscópica iluminando o pêndulo, se os três polarizadores estivessem alinhados:  $I_0$ .

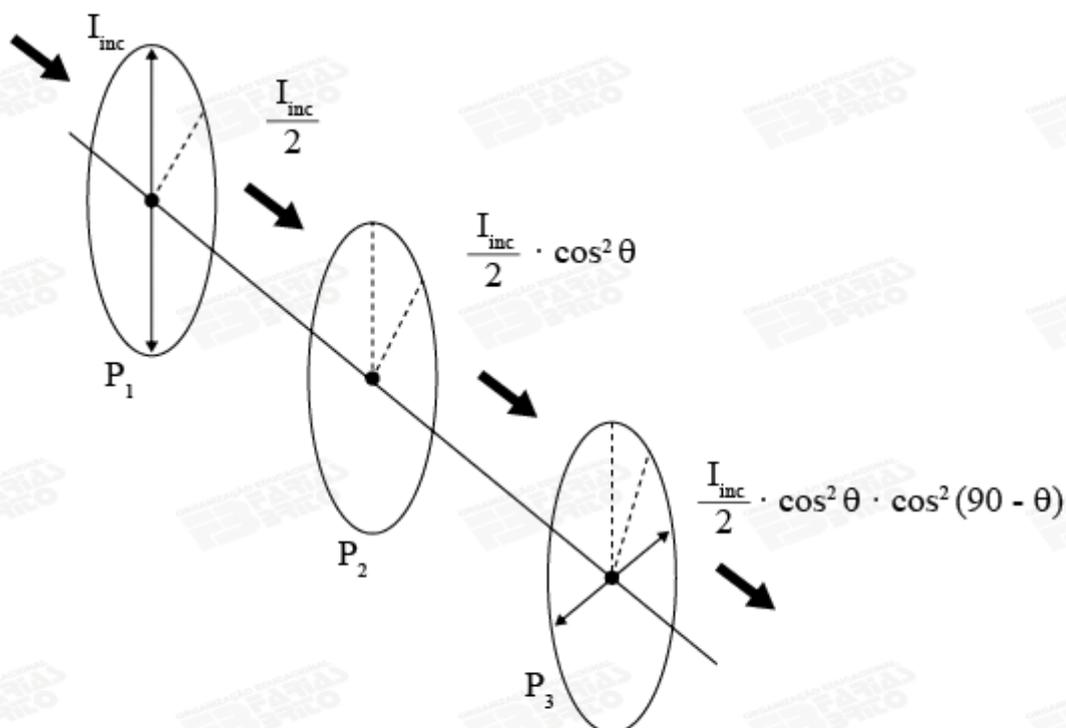
**Observação:**

- estroboscópio: instrumento usado para iluminar, de maneira intermitente, um objeto; e
- considere que a visão humana só é capaz de perceber a intensidade luminosa quando ela é máxima.



## OSCILAÇÕES E ONDAS

a) A intensidade da luz ao passar pelos três polarizadores é dada por:



A intensidade da luz ao passar pelos três polarizadores alinhados é  $I_0$ . Logo:  
 $I_{inc} = 2I_0$  (considerando que a luz é incidente e não polarizada).

O enunciado pede a intensidade da luz entre  $P_1$  e  $P_2$  em função de  $(\theta)$ . Entretanto, tal intensidade não depende de  $(\theta)$  e vale, ver o diagrama,  $\frac{I_{inc}}{2} = I_0$ .

Pode-se calcular também a intensidade da luz entre as placas  $P_2$  e  $P_3$ . Tal intensidade vale  $\frac{I_{inc}}{2} \cdot \cos^2 \theta = I_0 \cos^2 \theta$ .

b) Para que o efeito estroboscópico seja percebido, ou seja, para que a esfera pareça parada na posição A, devemos ter:

$$\frac{T_{pênd}}{2} = \frac{T_{rotação}}{4} \rightarrow \text{pois}$$

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = \frac{T_{rotação}}{2}$$

$$\ell^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\pi} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot T_{rotação}$$

$$\ell = \frac{g}{16\pi^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{w}\right)^2 = \frac{g}{4w^2}$$

$$2\omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{onde } k = 0, 1, 2, 3$$

O menor intervalo de tempo é dado por

$$\Delta t = \frac{T_{rotação}}{4}$$

### 7ª QUESTÃO

Considere uma corda de densidade linear constante  $\mu$  e comprimento  $2\pi R$ . A corda tem as suas extremidades unidas e é posta a girar no espaço em velocidade angular  $\omega$ . Após um leve toque em um ponto da corda, um pulso ondulatório passa a percorrê-la. Calcule as possíveis velocidades do pulso para um observador que vê a corda girar.

### Comenta

## ONDULATÓRIA

Primeiro vamos calcular a tração na corda girante:

para porção da corda de comprimento  $2R\theta$ :

$$F_{cp} = 2 T \cdot \text{sen}\theta$$

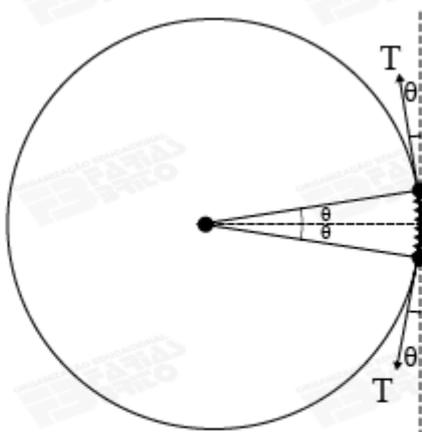
$$m\omega^2 R = 2 T \cdot \text{sen}\theta$$

$$\text{onde } m = \mu \cdot 2R\theta$$

$$\mu \cdot 2R\theta \cdot \omega^2 R = 2T \cdot \text{sen}\theta, \text{ considerando } \theta \text{ pequeno onde}$$

$$\text{sen } \theta = \theta$$

$$T = \mu \cdot \omega^2 \cdot R^2$$



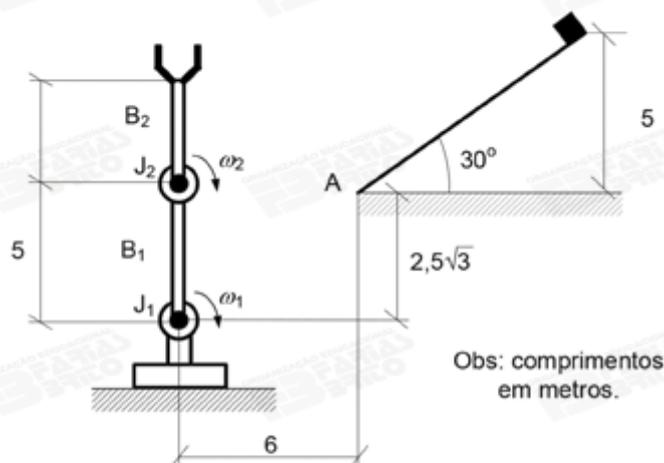
Lembrando que a velocidade de um pulso numa corda tensa é dado por:

$$V_p = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \text{ logo:}$$

$$V_p = \sqrt{\frac{\mu \omega^2 R^2}{\mu}} = \omega R$$

Como a velocidade desse pulso é em relação à corda, para um observador que vê a corda girando com velocidade  $\omega$ , as velocidades do pulso poderão ser  $v_1 = 2\omega R$ , para o pulso que “gira” no mesmo sentido da corda e  $v_2 = 0$ , para o pulso que “gira” no sentido oposto da corda.

### 8ª QUESTÃO



A figura acima mostra um braço robótico, com duas juntas ( $J_1$  e  $J_2$ ) e dois braços ( $B_1$  e  $B_2$ ), que é usado para pegar um bloco que é liberado do alto de uma rampa sem atrito, a partir do repouso.

No instante em que o bloco é liberado, a junta  $J_1$  é acionada com velocidade angular constante  $\omega_1 = \frac{\pi}{12}$  rad/s e a junta  $J_2$  é acionada com velocidade angular  $\omega_2$ .

Diante do exposto:

- determine o comprimento do braço  $B_2$  para que a garra do manipulador alcance o bloco no exato instante em que ele atinge o ponto A;
- determine a velocidade angular  $\omega_2$ , em rad/s, em que a junta  $J_2$  deverá ser acionada para que a garra do manipulador chegue no ponto A no mesmo instante do bloco; e
- faça um esboço da configuração final do manipulador, mostrando todas as cotas, no momento em que a garra do manipulador pega o bloco.

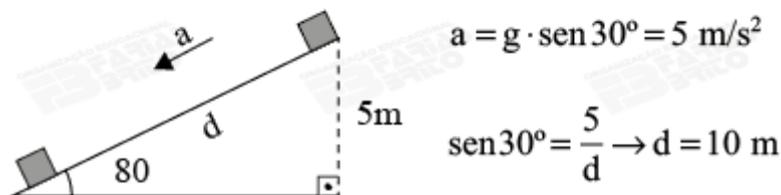
#### Dado:

- aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



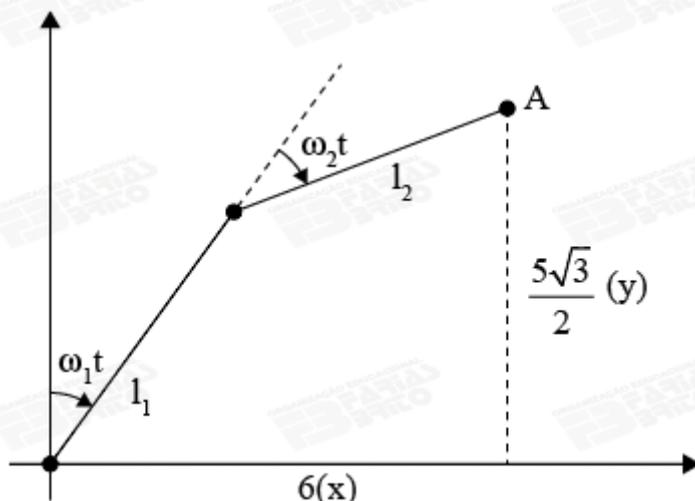
### CINEMÁTICA

Primeiro vamos calcular o tempo para o bloco atingir o ponto A:



$$d = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \rightarrow 10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \Delta t^2 \therefore \Delta t = 2 \text{ s}$$

Analisando a rotação dos braços:



Pela figura, temos:

$$x = l_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 t) + l_2 \cdot \text{sen}[(\omega_1 + \omega_2)t] \quad (\text{I})$$

$$y = l_1 \cdot \text{cos}(\omega_1 t) + l_2 \cdot \text{cos}[(\omega_1 + \omega_2) \cdot t] \quad (\text{II})$$

**Dados:**  $x = 6 \text{ m}$ ,  $y = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ m}$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{12} \text{ rad/s}, t = 2 \text{ s}$$

$$l_1 = 5 \text{ m}$$

Logo:

$$6 = 5 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + l_2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 2\omega_2\right) \quad (\text{I})$$

$$\ell_2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 2\omega_2\right) = 3,5$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \ell_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\omega_2\right) \quad (\text{II})$$

$$\ell_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\omega_2\right) = 0$$

Logo:

$$\frac{\pi}{6} + 2\omega_2 = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$2\omega_2 = 2n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\omega_2 = n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

Tomando  $n = 0$  para a primeira solução, temos:

$$\omega_2 = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}$$

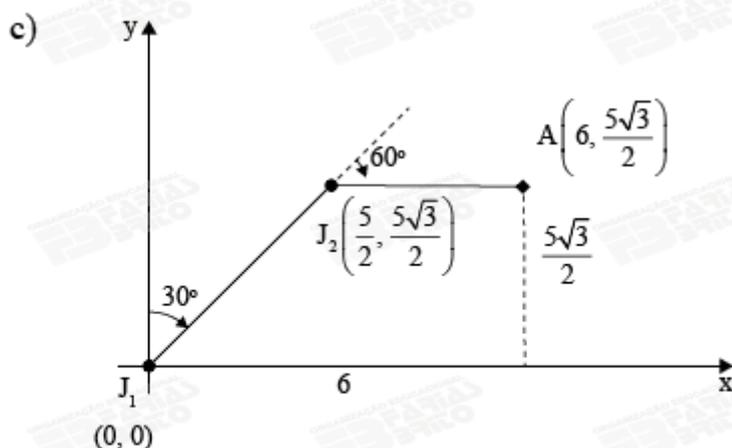
Assim:

$$\boxed{\ell_2 = 3,5 \text{ m}}$$

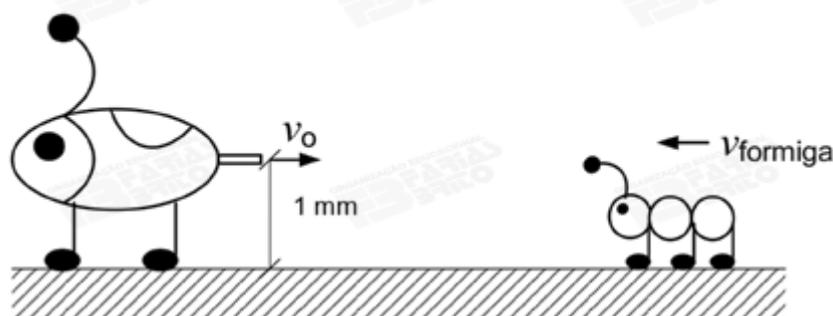
**Respostas:**

a)  $\boxed{\ell_2 = 3,5 \text{ m}}$

b)  $\omega_2 = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}$



## 9ª QUESTÃO



Alguns animais têm mecanismos de defesa muito curiosos. Os besouros-bombardeiros, por exemplo, são insetos que disparam jatos de uma substância superquente pelos seus traseiros quando se sentem ameaçados. Seus corpos são equipados com duas glândulas nas extremidades de seus abdomens e essas estruturas contêm diferentes substâncias químicas. Quando os insetos são provocados, essas substâncias são combinadas em uma câmara de reação e são produzidas explosões na forma de um intenso jato – aquecido de  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  para  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  pelo calor da reação – para afugentar suas presas. A pressão elevada permite que o composto seja lançado para fora com velocidade de  $240\text{ cm/s}$ . Uma formiga se aproxima do besouro, pela retaguarda deste e em linha reta, a uma velocidade média de  $0,20\text{ cm/s}$  e o besouro permanece parado com seu traseiro a uma distância de  $1\text{ mm}$  do chão. Quando presente o inimigo, o besouro lança o jato em direção à formiga.

Determine:

- o calor latente da reação das substâncias, em  $\text{J/kg}$ ;
- o rendimento da máquina térmica, representada pelo besouro;
- a distância mínima, em  $\text{cm}$ , entre os insetos, para que o jato do besouro atinja a formiga; e
- a velocidade, em  $\text{cm/s}$ , que a formiga adquire ao ser atingida pelo jato do besouro (assumindo que todo o líquido fique impregnado na formiga).

**Dados:**

- calores específicos das substâncias e do líquido borrifado:  $c = 4,19 \times 10^3\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ;
- massa da formiga:  $m_{\text{formiga}} = 6,0\text{ mg}$ ;
- massa do besouro:  $m_{\text{besouro}} = 290\text{ mg}$ ;
- massa do jato:  $m_{\text{jato}} = 0,30\text{ mg}$ ;
- velocidade média da formiga:  $v_{\text{formiga}} = 0,20\text{ cm/s}$ ; e
- aceleração da gravidade:  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

**Comenta**

## TERMODINÂMICA / QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A energia fornecida ao jato (calor sensível e energia cinética) pelas substâncias através de calor latente, de tal forma que:

$$Q_{L(\text{subst.})} = Q_{S(\text{jato})} + E_{c(\text{jato})}$$

$$m_{\text{subst}} \cdot L_{\text{subst}} = m_{\text{jato}} \cdot c \cdot \Delta\theta + \frac{m_{\text{jato}} v^2}{2}$$

Como não é fornecida a massa da substância, vamos supor que  $m_{\text{subst}} = m_{\text{jato}}$ ,

Logo:  $L_{\text{subst}} = c \cdot \Delta\theta + \frac{v^2}{2}$

desprezível

$$L_{\text{subst}} \cong 3,35 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$$

b) i. Calor fornecido para ocorrer a reação

$$Q = m_{\text{jato}} \cdot L \rightarrow Q = 0,3 \times 10^{-6} \text{ kg} \times 3,352 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$m_{\text{jato}} = 0,30 \times 10^{-6} \text{ kg} \quad Q = 1,0056 \times 10^{-1} \text{ J}$$

ii. Velocidade do besouro com a saída do jato.

$$(290 - 0,3) \text{ mg } V_{\text{besouro}} = 0,3 \text{ mg} \times 240 \text{ cm/s}$$

$$V_{\text{besouro}} = 0,25 \text{ cm/s}$$

O trabalho realizado na reação foi usado nas energias cinéticas do besouro e do jato.

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 10^{-6} \cdot (2,4)^2 \text{ J} + \frac{1}{2} \cdot 289,7 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

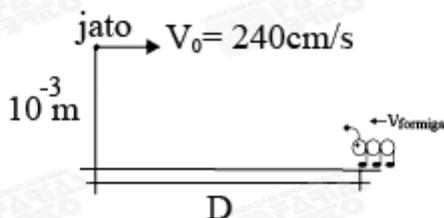
$$\mathcal{C} = 0,864 \cdot 10^{-6} \text{ J} + 0,905 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

(Desprezando)

$$\mathcal{C} = 0,864 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$\eta = \frac{0,864 \cdot 10^{-6}}{1,0056 \cdot 10^{-1}} \cdot 100\% \rightarrow 0,00086\%$$

c)



$$D = (240 + 0,2) \text{ cm/s } \Delta t \text{ e } 10^{-3} = \frac{1}{2} \cdot 10 \Delta t^2$$

$$\Delta t = \sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ s} \rightarrow \text{Daí } D = 3,39 \text{ cm.}$$

d) Quantidades de movimentos em  $\text{mg} \cdot \text{cm/s}$  (jato + formiga)

$$Q_0 = 240 \times 0,3 - 6 \times 0,2 = 70,8$$

$$Q_f = (0,3 + 6)V = 6,3 V$$

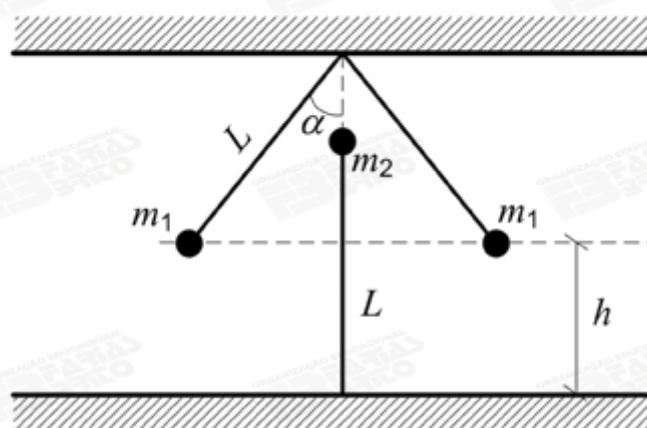
↓

Colisão inelástica

$$\text{Daí: } 6,3 V = 70,8$$

$$V = 11,24 \text{ cm/s}$$

### 10ª QUESTÃO

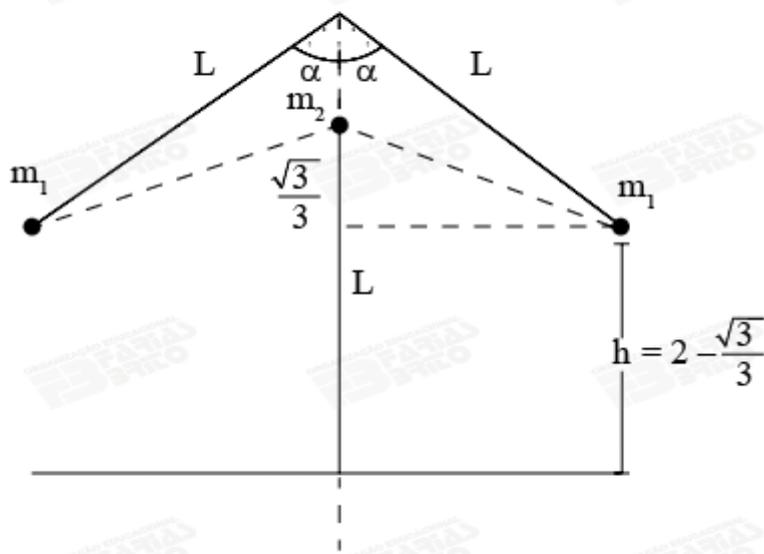


A figura acima mostra um sistema em equilíbrio composto por três corpos presos por tirantes de comprimento  $L$  cada, carregados com cargas iguais a  $Q$ . Os corpos possuem massas  $m_1$  e  $m_2$ , conforme indicados na figura. Sabendo que o tirante conectado à massa  $m_2$  não está tensionado, determine os valores de  $m_1$  e  $m_2$  em função de  $k$  e  $Q$ .

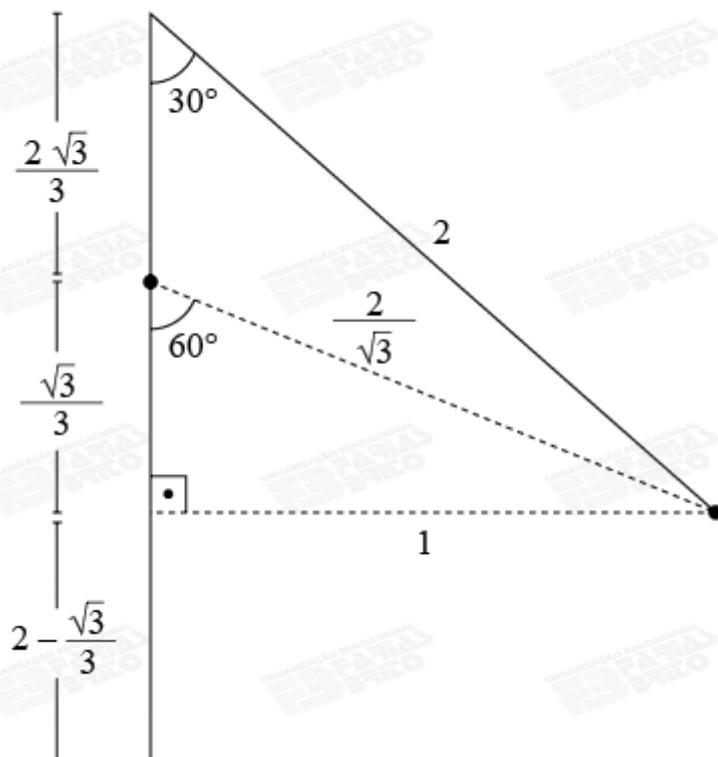
#### Dados:

- constante dielétrica do meio:  $k$  [ $\text{Nm}^2/\text{C}^2$ ];
- carga elétrica dos corpos:  $Q$  [C];
- comprimento dos tirantes:  $L = 2$  m;
- altura:  $h = (2 - \frac{\sqrt{3}}{3})$  m;
- aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ; e
- $\alpha = 30^\circ$ .

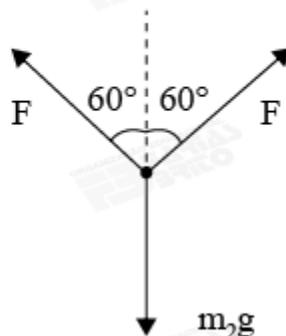
### ELETROSTÁTICA



Da geometria da questão, temos:



Massa  $m_2$ :



Equilíbrio na vertical:

$$m_2g = 2F \cos 60^\circ \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow m_2 \cdot 10 = 2 \cdot \frac{KQ^2}{0^2} \cdot \cos 60^\circ$$

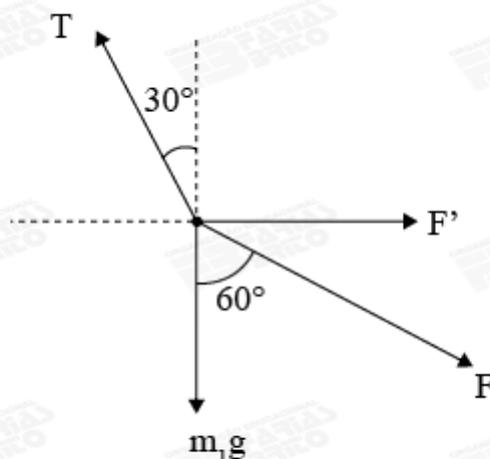
$$m_2 \cdot 10 = 2 \cdot \frac{KQ^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$m_2 \cdot 10 = KQ^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$m_2 = \frac{3}{40} \cdot KQ^2$$

$$\boxed{m_2 = 0,075KQ^2}$$

Massa  $m_1$ :



Equilíbrio na vertical:

$$m_1g + F \cos 60^\circ = T \cos 30^\circ \quad (2)$$

Equilíbrio na horizontal:

$$T \sin 30^\circ = F' + F \sin 60^\circ \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow m_1 \cdot 10 + \frac{KQ^2}{D^2} \cdot \frac{1}{2} = T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m_1 \cdot 10 + \frac{KQ^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} = T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m_1 \cdot 10 + KQ^2 \cdot \frac{3}{8} = T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 20m_1 + \frac{3}{4} KQ^2 \right)$$

$$(3) \Rightarrow \left( 20m_1 + \frac{3}{4} KQ^2 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{KQ^2}{2^2} + \frac{KQ^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left( 20m_1 + \frac{3}{4} KQ^2 \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{KQ^2}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8} KQ^2$$

$$20m_1 + \frac{3}{4} KQ^2 = \frac{KQ^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{9KQ^2}{4}$$

$$20m_1 = KQ^2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3KQ^2}{2}$$

$$m_1 = \frac{(\sqrt{3} + 3)}{40} KQ^2 \Rightarrow \boxed{m_1 \cong 0,12 KQ^2}$$

4º DIA

Química

Folha de dados

Informações de Tabela Periódica:

Elemento	H	C	N	O	F	Mg	Al	Cl	K	Ca	Cu	Br
Massa atômica (u)	1,00	12,0	14,0	16,0	19,0	24,3	27,0	35,5	39,1	40,1	63,5	80,0
Número atômico	1	6	7	8	9	12	13	17	19	20	29	35

Constantes:

Constante de Faraday:  $1 F = 96500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$

Constante Universal dos Gases =  $0,082 \text{ atm}\cdot\text{L}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} = 2,00 \text{ cal}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} = 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

$\log 2 = 0,3$      $10^{0,4} = 2,5$

Dados: Potenciais-padrão de redução a 25°C:

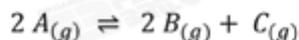


Equação de Nernst:  $E = E^\circ - \frac{0,059}{n} \log Q$

Conversão:  $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$

1ª QUESTÃO

Considere a equação de dissociação do composto A, que ocorre a uma determinada temperatura:



Desenvolva a expressão para o cálculo da pressão total dos gases, que se comportam idealmente, em função do grau de dissociação ( $\alpha$ ) nas condições de equilíbrio.



EQUILÍBRIO QUÍMICO



Início	$P_0$	0	0
Variação	$-\alpha \cdot P_0$	$+\alpha \cdot P_0$	$+\alpha \cdot P_0/2$
Equilíbrio	$P_0 - \alpha \cdot P_0$	$\alpha \cdot P_0$	$\frac{\alpha \cdot P_0}{2}$

$$P = (P_0 - \alpha \cdot P_0) + (\alpha \cdot P_0) + \left(\frac{\alpha \cdot P_0}{2}\right)$$

$$P = P_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow P_0 = \frac{2P}{(\alpha + 2)} \quad \text{I}$$

\* No equilíbrio:

$$K_p = \frac{(\alpha \cdot P_o)^2 \cdot \left(\frac{\alpha \cdot P_o}{2}\right)}{(P_o - \alpha \cdot P_o)^2} \Rightarrow K_p = \frac{\alpha^3 \cdot P_o^3}{P_o^2 \cdot (1 - \alpha)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K_p = \frac{\alpha^3 \cdot P_o}{2 \cdot (1 - \alpha)^2}} \quad (\text{II})$$

\* Substituindo (I) em (II):

$$K_p = \frac{\alpha^3 \cdot \cancel{z}P}{\cancel{z} \cdot (1 - \alpha)^2 \cdot (\alpha + 2)} \Rightarrow K_p = \frac{\alpha^3 \cdot P}{(1 - \alpha)^2 \cdot (\alpha + 2)}$$

$$\boxed{P = \frac{K_p \cdot (1 - \alpha)^2 \cdot (\alpha + 2)}{\alpha^3}}$$

## 2ª QUESTÃO

Uma pequena célula eletroquímica blindada, formada por eletrodos de alumínio e de níquel, deve operar a temperatura constante de 298 K. Para tanto, recebe uma camisa de refrigeração, isolada do meio externo, contendo 100 g de água.

Supondo que a célula transfere ao exterior, de maneira reversível, uma carga de 1 Faraday, calcule a elevação da temperatura que ocorrerá na água dentro da camisa de refrigeração. Ademais, sabe-se que essa célula apresenta uma variação de potencial na razão de  $1,5 \times 10^{-4}$  V/K. Considere que o calor específico da água de refrigeração é de 4,20 J/g.K.

### Comenta

## ELETROQUÍMICA

Dado que a célula transfere 1 Faraday, considera-se 96500 C para cada 1 mol de elétrons deslocados. Calcula-se a quantidade de energia ( $E_n$ ) transferida para a água de refrigeração a partir da temperatura de 298 K e da variação de potencial  $1,5 \cdot 10^{-4}$  V/K.

$$E_n = 96500 \text{ C} \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 298 \text{ K} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_n = 4313,55 \text{ J.}$$

Assim, é possível calcular a elevação de temperatura ( $\Delta T$ ) sofrida por 100 g de água de refrigeração, usando o calor específico fornecido.

$$\Delta T = \frac{1 \text{ K} \cdot 1 \text{ g}}{4,20 \text{ J}} \cdot \frac{4313,55 \text{ J}}{100 \text{ g}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T \cong 10,3 \text{ K}}$$

## 3ª QUESTÃO

Mistura-se a água contida em dois recipientes, designados por  $A$  e  $B$ , de forma adiabática. Cada um contém a mesma massa  $m$  de água no estado líquido. Inicialmente, as temperaturas são  $T$  no recipiente  $A$  e  $T + \Delta T$  no recipiente  $B$ . Após a mistura, a água atinge a temperatura final de equilíbrio térmico.

Mostre que a variação de entropia do processo de mistura é positiva.

Dado:

$\Delta S = m c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$ , onde  $T_2$  e  $T_1$  são duas temperaturas em dois estados diferentes do processo e  $c_p$  é o calor específico da água, considerado constante.

 **Comenta**

## TERMODINÂMICA

A mistura ocorre adiabaticamente, ou seja, sem troca de calor, e à pressão constante. Assim, o calor envolvido ( $Q_p$ ) e a variação de entalpia total ( $\Delta H$ ) são iguais a zero:

$$Q_p = \Delta H = 0 \Rightarrow \Delta H_A + \Delta H_B = 0$$

Seja  $T_f$  a temperatura final (equilíbrio térmico), e admitindo que  $T_A = T$  e  $T_B = T + \Delta T$ , temos:

$$m c_p (T_f - T_A) + m c_p (T_f - T_B) = 0 \Rightarrow T_f - T_A + T_f - T_B = 0 \Rightarrow T_f = \frac{T_A + T_B}{2}$$

A variação de entropia total é:

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B \Leftrightarrow \Delta S = m c_p \ln \frac{T_f}{T_A} + m c_p \ln \frac{T_f}{T_B} \Rightarrow \Delta S = m c_p \ln \frac{T_f^2}{T_A T_B}$$

$$\Rightarrow \Delta S = m c_p \ln \left( \frac{T_A + T_B}{2} \right)^2 \Rightarrow \Delta S = m c_p \ln \frac{(T_A + T_B)^2}{4 T_A T_B}$$

$$\Rightarrow \Delta S = m c_p \ln \frac{T_A^2 + 2 T_A T_B + T_B^2}{4 T_A T_B} \Rightarrow \Delta S = m c_p \ln \frac{T_A^2 + 2 T_A T_B + T_B^2 + 2 T_A T_B - 2 T_A T_B}{4 T_A T_B}$$

$$\Rightarrow \Delta S = m c_p \ln \frac{T_A^2 - 2 T_A T_B + T_B^2 + 4 T_A T_B}{4 T_A T_B} \Rightarrow \Delta S = m c_p \ln \frac{(T_A - T_B)^2 + 4 T_A T_B}{4 T_A T_B}$$

Uma vez que  $(T_A - T_B)^2 > 0$ , percebemos que:

$$(T_A - T_B)^2 + 4 T_A T_B > 4 T_A T_B$$

Então:

$$\frac{(T_A - T_B)^2 + 4 T_A T_B}{4 T_A T_B} > 1 \Rightarrow \ln \frac{(T_A - T_B)^2 + 4 T_A T_B}{4 T_A T_B} > 0 \Rightarrow \Delta S > 0$$

## 4ª QUESTÃO

Adiciona-se lentamente  $K_2CrO_4$  a uma solução que contém  $[Ag^+] = 8 \times 10^{-4}$  molar e  $[Pb^{2+}] = 4,5 \times 10^{-3}$  molar. Desprezando-se a variação de volume, qual será a concentração do sal que começou a precipitar primeiro, no exato momento em que o segundo sal começar a precipitar?

Dados:  $K_{ps}(Ag_2CrO_4) = 1,6 \times 10^{-12}$  e  $K_{ps}(PbCrO_4) = 1,8 \times 10^{-14}$ .

 **Comenta**

### PRODUTO DE SOLUBILIDADE

Calculando a concentração de  $CrO_4^{2-}$  para iniciar a precipitação de ambos os cátions:

i)  $Ag_2CrO_4: Q_{ps} = K_{ps} \Rightarrow$

$$[Ag^+]^2 \cdot [CrO_4^{2-}] = 1,6 \cdot 10^{-12}$$

$$(8 \cdot 10^{-4})^2 \cdot [CrO_4^{2-}] = 1,6 \cdot 10^{-12}$$

$$[CrO_4^{2-}] = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ M}$$

ii)  $PbCrO_4: Q_{ps} = K_{ps} \Rightarrow$

$$[Pb^{2+}][CrO_4^{2-}] = 1,8 \cdot 10^{-14}$$

$$4,5 \cdot 10^{-3} \cdot [CrO_4^{2-}] = 1,8 \cdot 10^{-14}$$

$$[CrO_4^{2-}] = 4 \cdot 10^{-12} \text{ M}$$

Logo, conclui-se que  $PbCrO_4$  precipita primeiro. Quando o  $Ag_2CrO_4$  inicia sua precipitação, a solução já está saturada em  $PbCrO_4$ . Então:

$$[Pb^{2+}][CrO_4^{2-}] = 1,8 \cdot 10^{-14}$$

$$[Pb^{2+}] \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} = 1,8 \cdot 10^{-14}$$

$$[Pb^{2+}] = 7,2 \cdot 10^{-9} \text{ M.}$$

## 5ª QUESTÃO

Coloque os seguintes ácidos em ordem decrescente de acidez: ácido fluoroacético, ácido metanossulfônico, ácido tricloroacético, ácido trifluoroacético e ácido trifluorometanossulfônico.

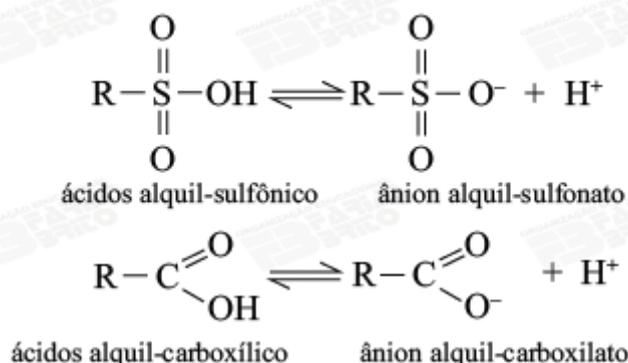
 **Comenta**

### ACIDEZ

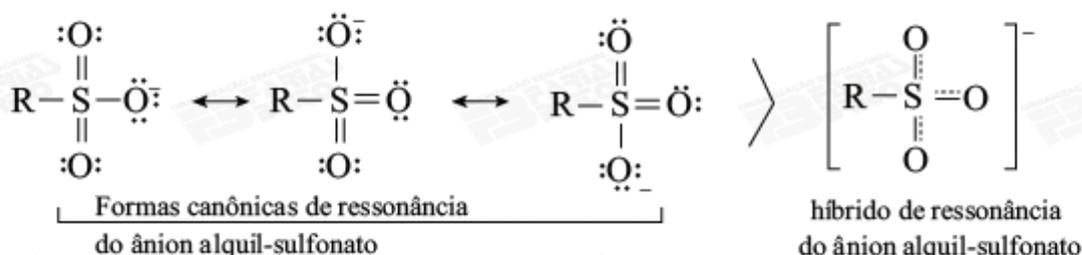
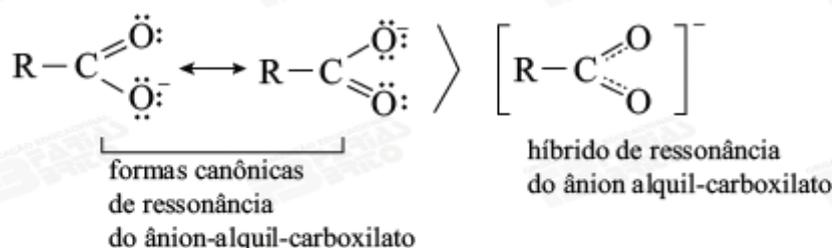
A força de um ácido pode ser medida experimentalmente e expressa pelo valor de seu  $K_a$  ou  $pK_a$  ( $pK_a = -\log K_a$ ).

Estruturalmente é possível fazer uma projeção de acidez pelo equilíbrio ácido-base (par conjugado). Assim, quanto maior a facilidade de saída do  $H^+$  (desprotonação), maior a acidez.

Logo:

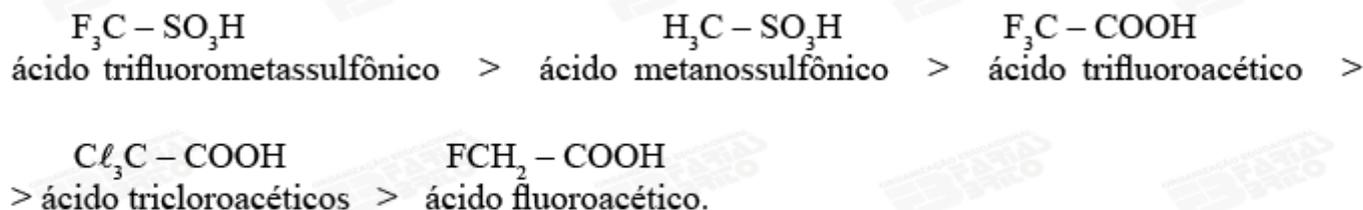


**Nota:** O ânion alquil-sulfonato apresenta maior quantidade de formas canônicas de ressonância do que o ânion alquil-carboxilato. Portanto, o híbrido de ressonância do ânion alquil-sulfonato é, em geral, mais estável do que o do ânion alquil-carboxilato. Dessa forma, consideramos que o ácido sulfônico é mais forte do que um ácido carboxílico.



**Nota:** A presença de grupos eletroatraentes, ou seja, que promovem efeito retirador de elétrons, ligados ao radical (R) em substituição a átomos de hidrogênio promove aumento da acidez, isto é, facilitam a saída do (H<sup>+</sup>) do grupo carboxílico e também do grupo sulfônico.

Portanto, a ordem decrescente de acidez é:



## 6ª QUESTÃO

Sabe-se que o íon cobre (II) tem tendência a reagir quase que totalmente com a amônia, em meio aquoso, formando o íon  $[Cu(NH_3)_4]^{2+}$ . A constante de equilíbrio dessa reação, denominada **constante de formação** ( $K_f$ ), permite avaliar a estabilidade desse íon na solução.

Considere uma célula voltaica, a 25 °C, em que uma semicélula é constituída por uma haste de cobre mergulhada em 50,0 mL de solução aquosa 0,20 mol/L de  $CuSO_4$  e a outra por uma haste de ferro mergulhada em 50,0 mL de solução aquosa 0,25 mol/L de  $FeSO_4$ . Adicionando-se 50,0 mL de solução aquosa 2,80 mol/L de  $NH_3$  ao compartimento que contém  $CuSO_4$ , obtém-se uma **fem** de 0,387 V na célula. Determine a constante de formação do  $[Cu(NH_3)_4]^{2+}$



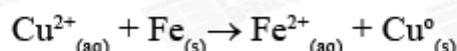
## Comenta

## EQUILÍBRIOS IÔNICOS / ELETROQUÍMICA

Calculando a ddp padrão para a pilha entre os eletrodos de ferro e cobre, temos:

$$\varepsilon^{\circ} = \varepsilon^{\circ}_{Cu^{2+}/Cu} - \varepsilon^{\circ}_{Fe^{2+}/Fe} = 0,34 - (-0,46) = 0,80V$$

Para que a ddp dessa pilha reduzisse a 0,387 V, a  $[Cu^{2+}]$  diminuiu de valor. Esse novo valor pode ser encontrado pela aplicação da equação de Nernst na reação



Então:

$$\varepsilon = \varepsilon^{\circ} - \frac{0,059}{2} \log \frac{[Fe^{2+}]}{[Cu^{2+}]} \Rightarrow$$

$$0,387 = 0,80 - \frac{0,059}{2} \log \left( \frac{0,25}{[Cu^{2+}]} \right) \Rightarrow$$

$$\log \left( \frac{0,25}{[Cu^{2+}]} \right) = 14 \Rightarrow [Cu^{2+}] = 10^{-14,6} = 2,5 \cdot 10^{-15} M.$$

Inicialmente havia 10 mmol de  $Cu^{2+}$  e 140 mmol de  $NH_3$ . O volume final será 100 mL.

A tabela estequiométrica seria:

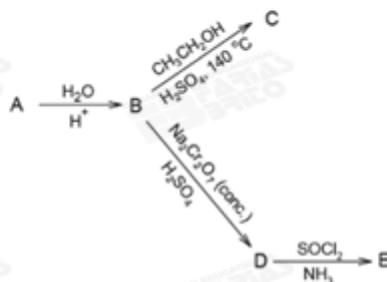
	$Cu^{2+}_{(aq)}$	+	$4NH_{3(aq)}$	$\rightleftharpoons$	$Cu(NH_3)_{4(aq)}^{2+}$
ini.	10 mmol		140 mmol		0
var.	-10		-40		+10
equil.	0		100 mmol		10 mmol

Assim, a constante de formação obtida seria:

$$K_f = \frac{[Cu(NH_3)_4^{2+}]}{[Cu^{2+}][NH_3]^4} = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{2,5 \cdot 10^{-15} \cdot \left(\frac{100}{100}\right)^4} = 4 \cdot 10^{13}$$

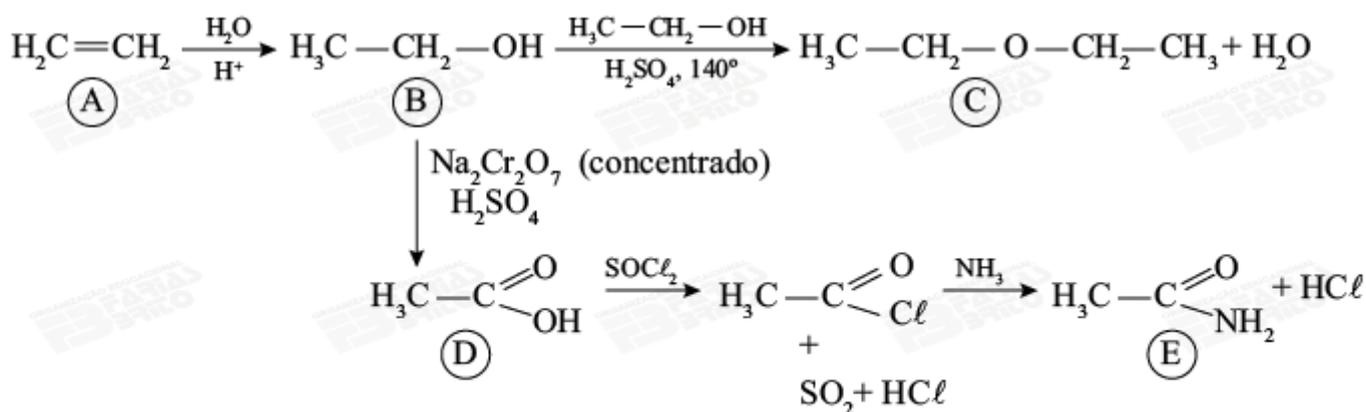
7ª QUESTÃO

Sabendo que a molécula A é um hidrocarboneto com massa molar 28 g/mol, determine as estruturas dos compostos A a E no esquema de reações abaixo:



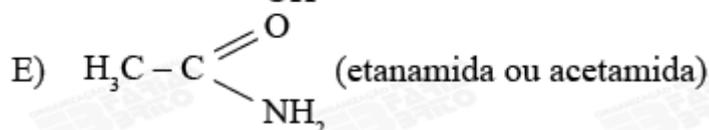
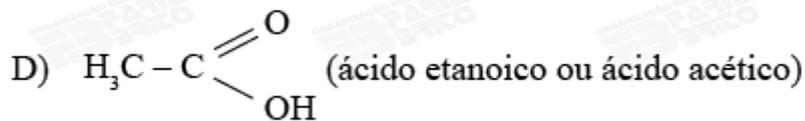
REAÇÕES ORGÂNICAS

O composto A é o etileno cuja fórmula estrutural é  $\text{H}_2\text{C} = \text{CH}_2$ . Na sequência apresentada temos os seguintes compostos:



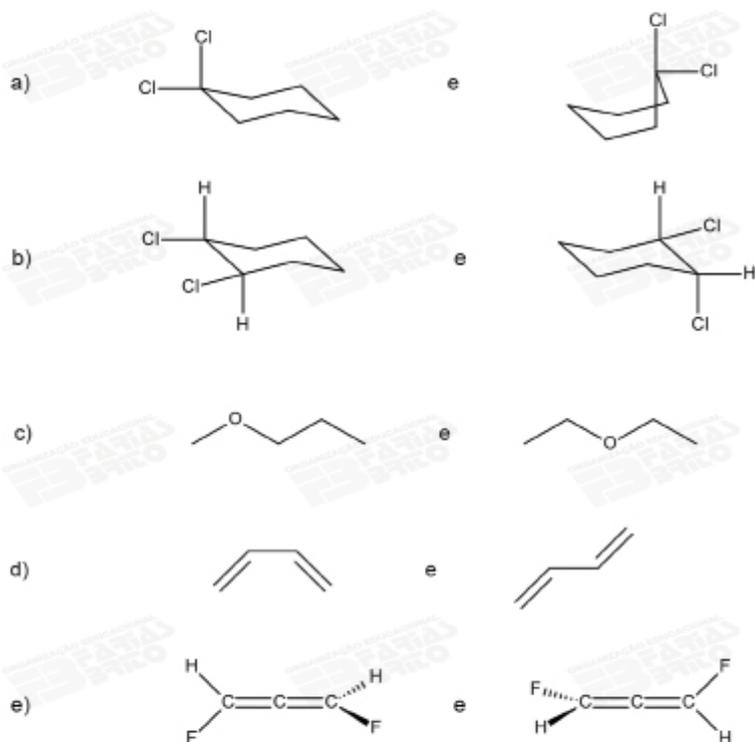
Logo, os compostos de A a E são:

- A)  $\text{H}_2\text{C} = \text{CH}_2$  (eteno ou etileno)
- B)  $\text{H}_3\text{C} - \text{CH}_2 - \text{OH}$  (etanol)
- C)  $\text{H}_3\text{C} - \text{CH}_2 - \text{O} - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$  (etoxi-etano)



8ª QUESTÃO

Estabeleça a relação entre as estruturas de cada par abaixo, identificando-as como enantiômeros, diastereoisômeros, isômeros constitucionais ou representações diferentes de um mesmo composto.



 **Comenta**

**ISOMERIA**

A) Os compostos apresentados constituem a mesma molécula, apenas estão em conformidade diferentes.

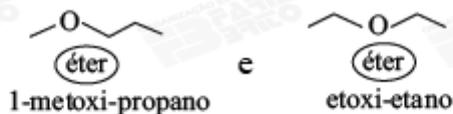


Composto: 1,1 - dicloro-ciclo-hexano

B) Os compostos apresentados representam 1 par de diastereoisômeros do composto 1,2-dicloro-ciclo-hexano. Eles representam, respectivamente, os isômeros geométricos cis e trans.



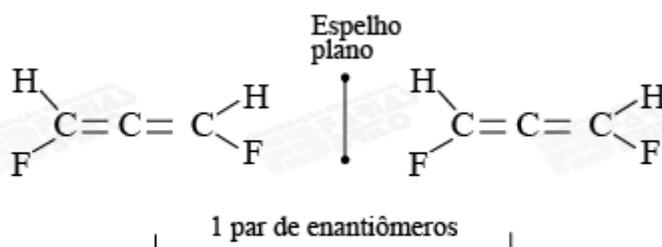
C) Os compostos apresentados são isômeros constitucionais de compensação (metameria).



D) Os compostos apresentados constituem a mesma molécula, apenas em conformações diferentes.



E) Os compostos apresentados formam entre si um par de enantiômeros



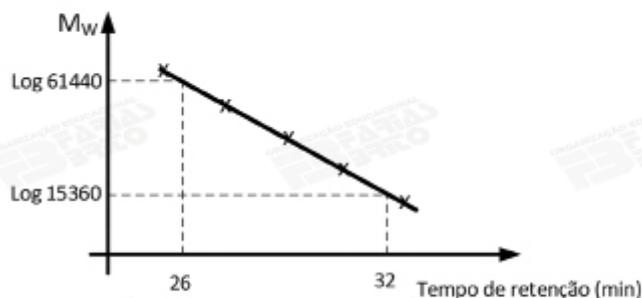
Composto: 1,3 – difluoropropadieno

Obs.: As moléculas são quirais ou assimétricas, porém não há carbonos assimétricos (quirais).

### 9ª QUESTÃO

A massa molar de um polímero pode ser determinada por meio do tempo de retenção em coluna cromatográfica (cromatografia líquida), tendo por base uma curva de calibração, massa molar *versus* tempo de retenção, obtida por padrões de massa molar conhecida.

Considere a curva de calibração linear obtida com padrões de poli(metacrilato de metila) de massa molar ( $M_w$ ) variável entre 15360 g/mol e 61440 g/mol, a seguir.



Considere agora um polímero obtido por meio da reação estequiométrica de esterificação entre o ácido tereftálico e o etileno glicol. Se esse polímero apresenta um tempo de retenção de 28 minutos, determine a massa de água, em quilogramas, que deve ser retirada do meio reacional, de forma que o equilíbrio da reação de esterificação seja deslocado completamente para o lado dos produtos.



## POLÍMEROS

Pelo coeficiente angular da reta podemos obter a ordenada do gráfico para o tempo de retenção de 28 minutos:

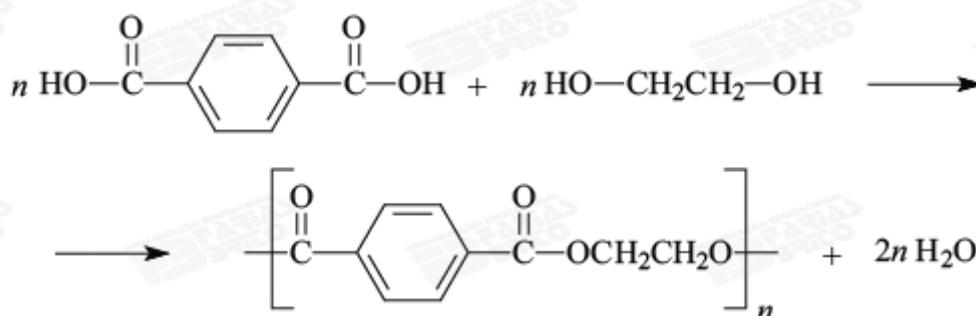
$$\frac{\log y - \log 15360}{32 - 28} = \frac{\log 61440 - \log 15360}{32 - 26} \Rightarrow \log \frac{y}{15360} = \frac{2}{3} \log 4 \Rightarrow \frac{y}{15360} = 4^{2/3}$$

Fazendo  $x = 4^{2/3}$ , temos:

$$\log x = \frac{4}{3} \log 2 \Rightarrow \log x = 0,4 \Rightarrow x = 10^{0,4} \Rightarrow x = 2,5 \Rightarrow 4^{2/3} = 2,5$$

$$\Rightarrow \frac{y}{15360} = 2,5 \Rightarrow y = 38.400 \Rightarrow M = 38.400 \text{ g/mol}$$

A equação química para a reação é:



A massa molar do polímero permite obter a quantidade de meros:

$$192n = 38400 \Rightarrow n = 200$$

A quantidade de matéria de água obtida é de 400 mol para cada 1 mol de polímero. Assim, a massa de água é:

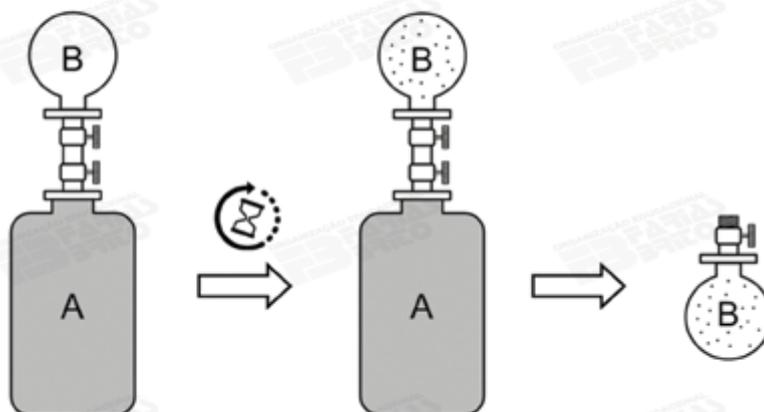
$$m = \frac{18 \text{ g}}{1 \text{ mol}} \cdot 400 \text{ mol} \Rightarrow m = 7,2 \text{ kg (por mol de polímero)}$$

10ª QUESTÃO

Um recipiente A, dotado de uma válvula na parte superior, está totalmente preenchido por uma solução de  $n$  mols de  $\text{CO}_2$  em 1800 g de água. O recipiente A foi, então, conectado ao recipiente B previamente evacuado, fechado por válvula e com volume de 1,64 L. Em um dado momento, as válvulas foram abertas deixando o sistema nesta condição durante tempo suficiente para atingir o equilíbrio. Após o equilíbrio, as válvulas foram fechadas e os recipientes foram desconectados. Sabendo-se que:

- todo o processo ocorreu à temperatura constante de 300 K;
- a constante de Henry para a solubilidade do  $\text{CO}_2$  na água,  $K_H$ , expressa em fração molar vale  $1/30 \text{ atm}^{-1}$ ;
- a variação de volume da fase líquida pode ser desprezada;
- o gás tem comportamento ideal.

Calcule o número de mols de  $\text{CO}_2$  que migraram para o recipiente B em função de  $n$ .



**Comenta**

**GASES**

O escape de  $\text{CO}_2$  ocorre até o sistema alcançar o equilíbrio. Se o número de mol de  $\text{CO}_2$  que migrou é  $x$  mol, então, de acordo com a lei de Henry:

$$X_{\text{CO}_2} = K_H \cdot P_{\text{CO}_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n_{\text{CO}_2}}{n_{\text{CO}_2} + n_{\text{H}_2\text{O}}} = K_H \cdot \frac{n_{\text{CO}_2} \cdot R \cdot T}{V} \Rightarrow \frac{n - x}{(n - x) + 100} = \frac{1}{30} \cdot \frac{x \cdot RT}{V}$$

Considerando, então  $(n - x) \ll 100$

$$\frac{n - x}{100} = \frac{1}{30} \cdot \frac{x \cdot 0,082 \cdot 300}{1,64} = \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$2n - 2x = 100x$$

$$102 \cdot x = 2n \Rightarrow x = \frac{n}{51} \text{ mol.}$$



- Beco da Calabrote.  
Beco do Mingu.  
Beco da Vila Rica...
- 45 Conto a estória dos becos,  
dos becos da minha terra,  
suspeitos... mal afamados  
onde família de conceito não passava.  
"Lugar de gentinha" - diziam, virando a cara.
- 50 De gente do pote d'água.  
De gente de pé no chão.  
Becos de mulher perdida.  
Becos de mulheres da vida.  
Renegadas, confinadas  
55 na sombra triste do beco.  
Quarto de porta e janela.  
Prostituta anemiada,  
solitária, hética, engalicada,  
tossindo, escarrando sangue  
60 na umidade suja do beco.
- Becos mal assombrados.  
Becos de assombração...  
Altas horas, mortas horas...  
Capitão-mor - alma penada,  
65 terror dos soldados, castigado nas armas.  
Capitão-mor, alma penada,  
num cavalo ferrado,  
chispando fogo,  
descendo e subindo o beco,  
70 comandando o quadrado - feixe de varas...  
Arrastando espada, tinindo esporas...
- Mulher-dama. Mulheres da vida,  
perdidas,  
75 começavam em boas casas, depois,  
baixavam pra o beco.  
Queriam alegria. Faziam bailaricos.  
- Baile Sifilítico - era ele assim chamado.  
O delegado-chefe de Polícia - brabeza -  
dava em cima...  
80 Mandava sem dó, na peia.  
No dia seguinte, coitadas,  
cabeça raspada a navalha,  
obrigadas a capinar o Largo do Chafariz,  
na frente da Cadeia.
- 85 Becos da minha terra...  
Becos de assombração.  
Românticos, pecaminosos...  
Têm poesia e têm drama.  
O drama da mulher da vida, antiga,  
90 humilhada, malsinada.  
Meretriz venérea,  
desprezada, mesentérica, exangue.

95 Cabeça raspada a navalha,  
castigada a palmatória,  
capinando o largo,  
chorando. Golfando sangue.

(ÚLTIMO ATO)

Um irmão vicentino comparece.  
Traz uma entrada grátis do São Pedro de Alcântara.  
100 Uma passagem de terceira no grande coletivo de São Vicente.  
Uma estação permanente de re ousou - no aprazível São Miguel.

Cai o pano.

CORALINA, Cora. **Poemas dos Becos de Goiás e Estórias Mais**. 21ª ed. – São Paulo: Global Editora, 2006.

Texto 2

O ELEFANTE

<p>1 Fabrico um elefante de meus poucos recursos. Um tanto de madeira tirado a velhos móveis 5 talvez lhe dê apoio. E o encho de algodão, de paina, de doçura. A cola vai fixar suas orelhas pensas. 10 A tromba se enovela, é a parte mais feliz de sua arquitetura.</p> <p>Mas há também as presas, dessa matéria pura 15 que não sei figurar. Tão alva essa riqueza a espojar-se nos circos sem perda ou corrupção. E há por fim os olhos, 20 onde se deposita a parte do elefante mais fluida e permanente, alheia a toda fraude. Eis o meu pobre elefante 25 pronto para sair à procura de amigos num mundo enfastiado que já não crê em bichos e duvida das coisas. 30 Ei-lo, massa imponente e frágil, que se abana e move lentamente a pele costurada onde há flores de pano</p>	<p>35 e nuvens, alusões a um mundo mais poético onde o amor reagrupa as formas naturais.</p> <p>Vai o meu elefante 40 pela rua povoada, mas não o querem ver nem mesmo para rir da cauda que ameaça deixá-lo ir sozinho.</p> <p>É todo graça, embora 45 as pernas não ajudem e seu ventre balofo se arrisque a desabar ao mais leve empurrão. 50 Mostra com elegância sua mínima vida, e não há cidade alma que se disponha a recolher em si 55 desse corpo sensível a fugitiva imagem, o passo desastrado mas faminto e tocante. Mas faminto de seres 60 e situações patéticas, de encontros ao luar no mais profundo oceano, sob a raiz das árvores ou no seio das conchas, 65 de luzes que não cegam e brilham através dos troncos mais espessos. Esse passo que vai sem esmagar as plantas 70 no campo de batalha, à procura de sítios, segredos, episódios não contados em livro, de que apenas o vento,</p>	<p>75 as folhas, a formiga reconhecem o talhe, mas que os homens ignoram, pois só ousam mostrar-se sob a paz das cortinas 80 à pálpebra cerrada.</p> <p>E já tarde da noite volta meu elefante, mas volta fatigado, as patas vacilantes 85 se desmancham no pó. Ele não encontrou o de que carecia, o de que carecemos, eu e meu elefante, 90 em que amo disfarçar-me. Exausto de pesquisa, caiu-lhe o vasto engenho como simples papel. A cola se dissolve 95 e todo o seu conteúdo de perdão, de carícia, de pluma, de algodão, jorra sobre o tapete, qual mito desmontado. 100 Amanhã recomeço.</p>
--	---	--

ANDRADE, Carlos Drummond de. **O Elefante**. 9ª ed. – São Paulo: Editora Record, 1983.

## 1ª QUESTÃO

Sabe-se que o prefixo de negação “in”, na língua portuguesa, pode assumir diferentes formas, de acordo com a ocorrência dos fenômenos de assimilação e mesmo de dissimilação.

Assinale a opção em que o significado do prefixo “in” difere do sentido encontrado nas palavras “indefeso” e “indefinido” no verso abaixo transcrito:

“Ser indefeso, indefinido, que só se vê na minha cidade.” (texto 1, verso 28)

- (A) Alimentar a criança é indispensável ao seu crescimento saudável.
- (B) A conclusão a que se chegou parecia algo ilógico.
- (C) Sua situação me parece irregular.
- (D) Eles estavam impossibilitados de frequentar aquele local.
- (E) Ele está tão fraco que já não consegue ingerir os alimentos.

 **Comenta****ESTRUTURA DAS PALAVRAS**

Os prefixos “in”, “im” ou “i” podem apresentar sentidos diferentes a depender de sua aplicação. Em “indefeso”, “indefinido”, “indispensável”, “ilógico”, “irregular” e “impossibilitados”, o valor semântico é de oposição; já, em “ingerir”, o prefixo “in” indica movimento para dentro. Acerta, portanto, quem marca E.

**Resposta correta: (E)**

## 2ª QUESTÃO

Os becos descritos no texto 1 denunciam lugares marginalizados, abandonados e, mais frequentemente, não amados. Assinale a opção em que o verso transcrito condiz com essa afirmativa.

- (A) “Amo tua paisagem triste, ausente, suja.” (verso 2)
- (B) “Amo a prantina silenciosa do teu fio de água,” (verso 9)
- (C) “Amo a avenca delicada que renasce” (verso 13)
- (D) “Amo esses burros-de-lenha” (verso 18)
- (E) “Amo e canto com ternura” (verso 29)



## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

É perceptível, na primeira estrofe, a descrição da parte mais marginalizada dos becos descritos pela autora. Os responsáveis por isso são os adjetivos *triste*, *ausente*, *suja*, denotando ideia de abandono ou de lugar não agradável.

**Resposta correta: (A)**

### 3ª QUESTÃO

“Amo e canto com ternura / todo o errado da minha terra” (texto 1, versos 29 e 30).

A substantivação do adjetivo “errado”, antecedido pelo determinante “o”, que aparece no trecho acima destacado do poema de Cora Coralina

- (A) fala do desdém relativo à maneira como vivem os habitantes dos becos.
- (B) mostra que a voz poética é avessa a tudo o que acontece nos becos.
- (C) salienta uma proximidade e cumplicidade entre quem ama e quem recebe o amor.
- (D) revela apatia em relação aos becos de Goiás e a seus frequentadores.
- (E) trata unicamente da exclusão social dos moradores dos becos.



## USO DE DETERMINANTES DA LÍNGUA

A forma verbal *errado* é particípio do verbo “errar”. No verso 30, porém, essa palavra passou pelo processo de derivação imprópria, em decorrência da substantivação que sofreu, pois o determinante “o” transforma-a em nome. Ressalta-se, também, que o uso de artigo definido indica, no caso em questão, proximidade e cumplicidade entre quem ama e quem recebe o amor. Acerta, por isso, quem marca C.

**Resposta correta: (C)**

### 4ª QUESTÃO

“E aquele menino, lenheiro ele, salvo **seja**.” (texto 1, verso 23)

O modo em que se encontra o verbo **ser** na forma verbal acima destacada, em contraste com o modo de todas as outras formas verbais do poema, evoca

- (A) um indício de certeza, característico do modo indicativo das formas verbais em português, pois é certo que a vida do menino é amarga.
- (B) algo irreal, hipotético, expresso pelo modo subjuntivo, que aponta, no entanto, para um desejo, uma possibilidade, no caso, de que o menino seja resgatado daquele cotidiano que lhe rouba a infância.

- (C) um anúncio, um sinal pertinente ao modo indicativo, de que o menino será salvo de sua realidade tão dura.
- (D) a certeza, expressa pelo modo verbal, de que a existência do menino é atravessada pelo trabalho infantil.

## **Comenta**

### TEMPOS E MODOS VERBAIS

Os verbos conjugados nos tempos do modo subjuntivo denotam ideia de possibilidade, hipótese, algo que, para acontecer, impõe uma condição. No caso da forma verbal “seja”, compreende-se o desejo da salvação do garoto, algo realmente desejado, embora esse tempo verbal, normalmente, não denote essa ideia de certeza.

**Resposta correta: (B)**

#### 5ª QUESTÃO

O texto 1 se inicia em um processo descritivo e passa para o descritivo-narrativo. Isso se confirma pelo(a)

- (A) contraste entre o uso abundante de adjetivos concomitante ao parco uso de formas verbais nas primeiras estrofes em relação à recorrência de formas verbais indicativas de ação conjugadas, predominantemente, no pretérito imperfeito do modo indicativo nas estrofes finais.
- (B) uso de verbos conjugados na primeira pessoa do singular do modo indicativo nas primeiras estrofes em contraste com os verbos conjugados em terceira pessoa do pretérito imperfeito do indicativo nas estrofes finais.
- (C) frequência com que aparecem, no início do poema, palavras cujos significados estão associados à tristeza e ao abandono dos becos em contraste com o final do poema em que comparecem forças preocupadas em garantir ordem na vida pública.
- (D) fato de que a escritora se conforma ao processo mais tradicional na construção dos poemas.

## **Comenta**

### TIPO DE TEXTO

Nesta questão, o estudante precisa ter domínio acerca das sequências textuais (ou tipos textuais). Diferentemente dos gêneros textuais, são poucos os tipos de textos (narrativo; descritivo; argumentativo; expositivo; injuntivo; dialogado). No poema 1, por exemplo, nota-se a presença predominante da sequência descritiva, a qual constrói uma atmosfera acerca dos “becos de Goiás”, e da sequência narrativa (em menor participação) que é percebida a partir do uso de formas verbais conjugadas no tempo pretérito, o que indica ação de personagens. Acerta, por isso, quem marca a letra A.

**Resposta correta: (A)**

## 6ª QUESTÃO

Dentre os pares de versos do texto 1 abaixo transcritos, assinale a alternativa em que há nítida descrição de uma transformação ocorrida durante a passagem do tempo.

- (A) “e a plantinha desvalida, de caule mole / que se defende, viceja e floresce” (versos 15 e 16)
- (B) “secos, lanzudos, malzelados, cansados, pisados. / Arrochados na sua carga, sabidos, procurando a sombra,” (versos 20 e 21)
- (C) “pequeno para ser homem, / forte para ser criança.” (versos 26 e 27)
- (D) “suspeitos... mal afamados / onde família de conceito não passava.” (versos 47 e 48)
- (E) “terror dos soldados, castigados nas armas. / Capitão-mor, alma penada,” (versos 65 e 66)

**Comenta****INTERPRETAÇÃO DE TEXTO**

Para esta questão, o candidato precisa perceber, tão-somente, a passagem de tempo que ocorre nos versos transcritos do texto 1. Observe que, nos versos “e a plantinha desvalida, de caule mole / que se defende, viceja e floresce” (versos 15 e 16), a passagem temporal é nítida, uma vez que “caule mole” indica o início da existência (como se fosse a infância) e “viceja e floresce” denotam uma fase adulta, o que revela a transformação pedida no comando da questão. Acerta, por isso, quem marca alternativa A.

**Resposta correta: (A)**

## 7ª QUESTÃO

O valor semântico do vocábulo “errado”, exaltado pela autora no texto 1 em

“Amo e canto com ternura  
todo o errado da minha terra.” (versos 29 e 30)

não se aplica a

- (A) paisagem triste (verso 2).
- (B) sandália velha (verso 7).
- (C) velho cano (verso 12).
- (D) Baile Sifilitico (verso 77).
- (E) irmão vicentino (verso 98).



Comenta

## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

Quando o eu-lírico diz amar “todo o errado da minha terra”, permite ao leitor inferir que ele ama e respeita tudo que esteja fora de seu lugar em sua terra. Sendo assim, o candidato deve, em função do comando que exige o contrário do que o eu-lírico ama, buscar, entre os pares apresentados nas alternativas, aquele que denota aspecto positivo. No caso em questão, caberia “irmão vicentino”, pois não denota aspecto negativo, como indicam “paisagem triste” (verso 2), “sandália velha” (verso 7), “velho cano” (verso 12) e “Baile Sifilítico” (verso 77). Acerta, portanto, quem marca a alternativa E.

**Resposta correta: (E)**

### 8ª QUESTÃO

O vocábulo estranho ao campo morfossemântico da palavra “hética” (texto 1, verso 58) é

- |                |                |
|----------------|----------------|
| (A) magra.     | (D) franzina.  |
| (B) consumida. | (E) definhada. |
| (C) confinada. |                |



Comenta

## SINÔNIMOS

O adjetivo “confinada” denota ideia de isolamento. Nesse sentido, esse vocábulo não estabelece relação morfossemântica com a palavra “hética”, o que não ocorre com os outros adjetivos, os quais denotam ideia de fraqueza física, aparência debilitada.

**Resposta correta: (C)**

### 9ª QUESTÃO

A respeito do uso do vocábulo “sabidos” (texto 1, verso 21), pode-se afirmar que

- (A) indica a “esperteza” dos “burrinhos dos morros” ao optarem por ter suas cargas arrojadas.
- (B) confere valor semântico positivo à expressão “burrinhos dos morros”.
- (C) compara a escolha dos “burrinhos dos morros” pelas cangalhas à imundície dos “becos antigos”.
- (D) estabelece uma ideia contraditória e pejorativa à expressão “burrinhos dos morros”.
- (E) reforça o sentido de animal maltratado por seus donos: uma atitude distinta daquela conferida pela voz poética que aparece no primeiro verso da estrofe em questão.

**Comenta**

## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

O trecho que comprova que o vocábulo “sabidos” é positivo é “procurando sombra/no range-range das cangalhas”, demonstrando essa sapiência em proteger-se do sol em meio a um trabalho árduo, tornando-o menos penoso.

**Resposta correta: (B)**

### 10ª QUESTÃO

Considere os versos 68 a 80 do texto 2, transcritos abaixo:

“Esse passo que vai  
sem esmagar as plantas  
no campo de batalha,  
à procura de sítios,  
segredos, episódios  
não contados em livro,  
de que apenas o vento,  
as folhas, a formiga  
reconhecem o talhe,  
mas que os homens ignoram,  
pois só ousam mostrar-se  
sob a paz das cortinas  
à pálpebra cerrada.”

Acerca de “vento”, “folhas” e “formiga”, pode-se afirmar que

- (A) significam a procura do poeta por novos “sítios”, ou seja, novo público, futuros leitores do poema.
- (B) são comparados ao “livro” que o poeta pretende escrever sob a paz das cortinas.
- (C) não constituem elementos naturais capazes de compreender e espelhar a natureza do “elefante”.
- (D) estão presentes no poema com o objetivo de exaltar o comportamento humano que só se mostra “sob a paz das cortinas / à pálpebra cerrada”.
- (E) eles não ignoram o que o homem ignora.

**Comenta**

## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

Os vocábulos “vento”, “folhas” e “formiga” denotam ideia oposta àquilo que o homem ignora, no caso, “Esse passo que vai sem esmagar as plantas/ no campo da batalha, à procura de sítios, /segredos, episódios/não contados em livro, /de que apenas o vento, as folhas, a formiga/ reconhecem o talhe/. Tal afirmação é percebida por meio do conectivo “mas” no trecho “mas que os homens ignoram”.

**Resposta correta: (E)**

## 11ª QUESTÃO

A conjunção “mas” que se repete nas estrofes do texto 2 nos versos 41, 58, 59, 77 e 83

- (A) exprime consequência de uma árdua tarefa dada ao elefante que, de tanto pesquisar, ficou exausto.
- (B) tem na verdade uma função aditiva: embora sua forma seja a de uma adversativa, apenas liga as ideias dando continuidade e sequência ao texto.
- (C) traz em si uma ideia de compensação como na oração “não era bonito, mas esbanjava simpatia”.
- (D) dá forma ao contraste entre a expectativa inicial e a volta para casa: o homem não se deixa receber a ternura que o elefante carrega.
- (E) é a conjunção mais comumente utilizada entre as adversativas, não exercendo, no entanto, relação de contraste nos versos do texto.

**Comenta**

## CONJUNÇÕES/SENTIDOS

A conjunção “mas”, em estruturas sintáticas, denota normalmente ideia de oposição ao que se afirma anteriormente. Nesse sentido, percebe-se uma adversidade ao que o elefante oferece e a rejeição que o homem tem ao que este tem a oferecer.

**Resposta correta: (D)**

## 12ª QUESTÃO

No texto 2, considerando o elefante fabricado artesanalmente como uma alegoria para falar da arte, mandar o elefante à rua aponta para um desejo de

- (A) divulgação daquilo que até então era privado e íntimo.
- (B) invisibilidade da coisa criada.
- (C) anonimato e silenciamento, já que há nas ruas um burburinho incessante que acaba por silenciar tudo o que nela transita.
- (D) fuga às responsabilidades do artista, pois o poeta sucumbe diante de sua inspiração.
- (E) banalização dos sentimentos que inspiraram o poeta a construir seu elefante.

**Comenta**

## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

“O Elefante”, poema de Carlos Drummond de Andrade, constitui uma alegoria que, segundo o comando da questão, serve para falar da própria arte. Quando o enunciador manda o elefante à rua, aponta para um desejo: divulgar aquilo que, até então, era privado e íntimo. Ou seja, expor ao espaço público aquilo que era secreto permite que a arte seja divulgada e que ela chegue a um público muito maior. Acerta, por isso, quem marca a alternativa A.

**Resposta correta: (A)**

## 13ª QUESTÃO

Considere os versos 95 a 98 do texto 2, transcritos abaixo:

“e todo o seu conteúdo  
de perdão, de carícia,  
de pluma, de algodão,  
jorra sobre o tapete,”

A figura de linguagem construída a partir de uma relação entre os campos semânticos evocados pelo título do poema e de seus versos acima destacados é a (o)

- (A) ambiguidade. (D) eufemismo.  
(B) apóstrofe. (E) metonímia.  
(C) antítese.



## FIGURAS DE LINGUAGEM

O poema “O elefante” compõe uma alegoria da impossibilidade do fazer poético e do que é essencialmente humano em um mundo reificado. Há uma luta diária do eu lírico para não embrutecer neste mundo, mas uma luta que já não encontra eco nos outros homens, já sucumbidos à ordem reificada do mundo moderno.

Em face disso, e considerando a relação entre os campos semânticos evocados pelo título e dos versos que falam do conteúdo de perdão, de carícia, nota-se que o poeta explorou o contraste entre o mundo reificado e a humanização, o que caracteriza a antítese. Em outras palavras, é antitética a relação entre o exterior (elefante, animal de aparência grosseira) e seu interior (conteúdo: perdão, carícia, pluma).

**Resposta correta: (C)**

## 14ª QUESTÃO

Observe os vocábulos destacados em negrito nos versos 39 a 44 do texto 2, transcritos abaixo:

“Vai **o** meu elefante  
pela rua povoada,  
mas não **o** querem ver  
nem mesmo para rir  
da cauda que ameaça  
deixá-**lo** ir sozinho.”

Sobre esses vocábulos, de acordo com a gramática normativa, considere as seguintes afirmações:

- I – o primeiro “o” é um artigo definido e o segundo é uma forma pronominal oblíqua, assim como a forma “lo” em “deixá-lo”.  
II – a colocação do segundo “o” junto ao advérbio de negação aproxima-se do registro mais utilizado no português falado no Brasil.  
III – “o” e “lo” nos versos “mas não o querem ver” e “deixá-lo ir sozinho” são formas pronominais que garantem a coesão referencial anafórica.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmação(ões)

- (A) I apenas. (D) I e III apenas.  
(B) III apenas. (E) II e III apenas.  
(C) I e II apenas.

**Comenta**

## MORFOLOGIA/PRONOMES E ARTIGOS

No item I, o primeiro “o” comporta-se como um artigo definido, uma vez que está ligado ao substantivo “elefante”, concordando com este em gênero e número. Em III, temos pronomes oblíquos átonos, utilizados normalmente como complementos verbais. Esses pronomes recuperam termos já citados no texto, fazendo a coesão textual conhecida como anaforismo, no caso do poema analisado, retoma a palavra “elefante”.

**Resposta correta: (D)**

### 15ª QUESTÃO

O poema *O elefante* (texto 2)

- (A) anuncia, por meio da alegoria do animal, que o tamanho dos problemas dos adultos é inversamente proporcional ao tamanho do elefante, sendo, ao mesmo tempo, um poema direcionado às crianças.
- (B) estabelece uma relação criador/criatura e, metaforicamente, é possível falar de um paralelo entre arte/artista: o conteúdo produzido pelo artista é causa e consequência, ao mesmo tempo, do trabalho do poeta com as palavras.
- (C) desconecta o elefante (criação) de seu criador, retirando deste toda a sua capacidade criativa.
- (D) mostra a criatura, o elefante, como algo definido e único: criá-lo é tão trabalhoso que não há possibilidade de criar outros elefantes.
- (E) revela, metaforicamente, um descuido com o fazer poético ao descrever a deselegância do elefante mal construído, que segue pelas ruas de modo desequilibrado.

**Comenta**

## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

O procedimento de construção do tecido poético de Carlos Drummond de Andrade, no poema “O Elefante”, constrói uma verdadeira alegoria em que, na escolha lexical, permite ao leitor inferir imagens que se cruzam, construindo, no espaço da palavra, uma simbiose artística que revela relação de causa e consequência na tessitura textual. Sendo assim, o leitor, a partir das relações semióticas, pode estabelecer a seguinte relação: criador (o poeta; o artesão; etc.) e criatura (o poema; o elefante; etc.). O poema de Drummond incita-nos a uma reflexão filosófica acerca do papel da própria arte (poema, construído de forma artesanal, tal qual se fabrica um “elefante de madeira”) e do próprio artista (poeta, aquela que lapida as palavras e constrói em procedimento estético o Belo, a poesia).

**Resposta correta: (B)**

## 16ª QUESTÃO

Considere os versos 19 a 23 do texto 2, transcritos abaixo:

“E há por fim os olhos,  
onde se deposita  
a parte do elefante  
mais fluida e permanente,  
alheia a toda fraude.”

Abaixo, você encontrará alguns ditados populares elencados. Qual destes ditados mais se aproxima da ideia veiculada no verso 23, “alheia a toda fraude”?

- (A) “Fazer o bem sem olhar a quem.”
- (B) “O pior cego é aquele que não quer ver.”
- (C) “Perto dos olhos, longe do coração.”
- (D) “Em terra de cego, quem tem um olho é rei.”
- (E) “Os olhos são a janela da alma.”

 **Comenta**

## INTERPRETAÇÃO

O verso 23 “alheia a toda fraude” aponta para o caráter incorruptível da essência do elefante, aspecto que se aproxima da ideia contida no provérbio “Os olhos são a janela da alma”, o qual significa que, pelos olhos de alguém, pode-se deduzir o que se passa em seu íntimo, ou sua essência, traduzindo a ideia de que essa transparência não comporta corruptibilidade.

**Resposta correta: (E)**

## 17ª QUESTÃO

Assinale a alternativa em que os vocábulos são acentuados de acordo com as mesmas regras de acentuação gráfica das palavras abaixo transcritas, respectivamente:

**sandália** (verso 7, texto 1); **úmida** (verso 17, texto 1); **só** (verso 28, texto 1); **sensível** (verso 55, texto 2); **conteúdo** (verso 95, texto 2).

- (A) réstia, sifilítico, vê, grátis, baú
- (B) água, família, há, revólver, frágil
- (C) infância, matéria, à, móveis, saúva
- (D) estória, poético, têm, viúva, maiúscula
- (E) solitária, fáceis, deixá-lo, médio, carícia



## ACENTUAÇÃO GRÁFICA

Esta questão pede que o candidato assinale a alternativa em que as palavras acentuadas estejam em consonância com “sandália” (paroxítona terminada em ditongo), “úmida” (proparoxítona) “só” (monossílabo tônico terminado em “a”, “e” ou “o”), “sensível” (paroxítona terminada em “l”, “r”, “ps”, “x”, “i”, “is”, “um” “ã(s)”, “ão”...) e “conteúdo” (hiato formado por “i” ou “u”, seguido ou não de “s”). A alternativa em que as palavras mantêm correspondência é a “A”, uma vez que “réstia”, “sifilítico”, “vê”, “grátis” e “baú” seguem as mesmas regras.

**Resposta correta: (A)**

### 18ª QUESTÃO

Sobre os textos 1 e 2, analise as afirmações abaixo:

- I. descrevem um exterior cuja aparência pode ser vista como deselegante, guardando, porém, tanto os becos quanto o elefante, um interior rico em poesia e vida.
- II. revelam uma construção erudita, rígida e intelectualizada de uma narrativa poética cuja forma apresenta estrofes regulares e longas, intercaladas por estribilho.
- III. há uma relação estreita entre prosa e poesia revelada no encadeamento que oscila entre a descrição e a narração.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmação(ões)

- (A) I apenas.
- (B) II apenas.
- (C) I e III apenas.
- (D) II e III apenas.
- (E) I, II e III.



## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

Para esta questão, são apresentadas três proposições acerca da leitura dos dois poemas presentes na prova: em I, temos informação verdadeira, visto que ambos os poemas exploram o lado externo como algo deselegante, enquanto o lado interno revela a poesia artística, a própria vida; em II, temos informação errada, porque a construção não apresenta erudição na escolha lexical, tampouco revela estrofes regulares; em III, temos informação correta, pois, enquanto poetas modernistas que são, Cora Coralina e Carlos Drummond de Andrade exploram uma linguagem em que se fundem prosa e verso. Acerta, portanto, quem marca a alternativa C.

**Resposta correta: (C)**

## 19ª QUESTÃO

Quanto à estrutura, os textos 1 e 2

- (A) são haicais pois transmitem imensa sabedoria em relação ao tamanho dos textos apresentados.
- (B) são acrósticos que cantam determinado lugar ou coisa.
- (C) são baladas que fazem referência a um tempo perdido.
- (D) são poemas modernos que apresentam versos brancos ou livres e estrofes polimétricas.
- (E) são sonetos e apresentam conteúdos ligados à sabedoria acumulada pelos poetas ao longo do tempo.

**Comenta****ESTRUTURA DO POEMA**

Nesta questão, o candidato deve observar o procedimento de construção dos dois poemas presentes na prova. Nota-se, de imediato, que os versos são livres (sem métrica) e brancos (sem rima) e as estrofes são polimétricas, ou seja, compostas com quantidades de versos diferentes. **Observações:** haicai são poemas com três versos; acróstico é uma composição poética em que cada letra inicial de verso faz parte da palavra tema; balada é uma poesia narrativa de lendas; soneto é um poema de estrutura fixa – dois quartetos e dois tercetos. Portanto, acerta quem marca a alternativa D.

**Resposta correta: (D)**

## 20ª QUESTÃO

A respeito do “conceito de erro em língua”, o gramático Luiz Antônio Sacconi, em sua obra “Nossa Gramática – Teoria e Prática”, afirma:

“Em rigor, ninguém comete erro em língua, exceto nos casos de ortografia. O que se comete são transgressões da norma culta. De fato, aquele que, num momento íntimo do discurso, diz: “Ninguém deixou ele falar”, não comete propriamente erro; na verdade, transgride a norma culta. (...) Vale lembrar, finalmente, que a língua é um costume. Como tal, qualquer transgressão, ou chamado erro, deixa de sê-lo no exato instante em que a maioria absoluta o comete, passando, assim, a constituir fato linguístico (registro de linguagem definitivamente consagrado pelo uso, ainda que não tenha amparo gramatical).”

SACCONI, Luiz Antônio. Nossa Gramática – Teoria e Prática – 18ª ed. Reformada e atual. São Paulo: Atual, 1994. pp. 8 e 9.

Considerando o conceito de “erro em língua”, exposto acima, assinale a alternativa em que se apresenta uma transgressão da norma culta considerada “fato linguístico”?

- (A) Eu não sei aonde o elefante quer chegar.
- (B) Ana Lins Bretas, cujo pseudônimo era Cora Coralina, foi uma grande escritora brasileira.
- (C) “E há por fim os olhos, / onde se deposita / a parte do elefante” (texto 2, versos 19 a 21).
- (D) “Ele não encontrou / o de que carecia, / o de que carecemos,” (texto 2, versos 86 a 88).
- (E) É uma das poucas opiniões do poeta onde existe uma controvérsia.



## GRAMÁTICA – CORREÇÃO LINGUÍSTICA

Dentre as opções apresentadas, a única em que ocorre transgressão da norma culta encontra-se em E. “É uma das poucas opiniões do poeta **onde** existe uma controvérsia.” Segundo a norma culta formal da língua portuguesa, o emprego do vocábulo **onde** deve realizar-se com referência a espaço físico, o que não acontece no caso em exame. Como o termo **opiniões** não tem valor locativo, emprega-se a expressão **em que**.

Corrigindo a transgressão, assim fica a frase:

É uma das poucas opiniões do poeta **em que** existe uma controvérsia.

**Resposta correta: (E)**

### Redação

Tomando por base de reflexão os dois textos apresentados nesta prova, redija um texto dissertativo-argumentativo em modalidade escrita formal da língua portuguesa sobre o tema **as contribuições da arte para uma percepção da realidade que vá além das aparências**.



A prova de Redação da 2ª Fase do vestibular do Instituto Militar de Engenharia (IME) propôs aos candidatos uma discussão, por meio de um texto dissertativo-argumentativo, sobre **“as contribuições da arte para uma percepção da realidade que vá além das aparências”**.

Nesse sentido, o candidato deveria elaborar um texto dissertativo-argumentativo, que pressupõe uma estrutura com introdução, desenvolvimento e conclusão, a fim de apresentar e defender um posicionamento sobre o assunto abordado.

Para isso, na introdução, deve-se apresentar o tema, demonstrando ao avaliador que a proposta de redação foi bem compreendida. Ademais, há a necessidade da apresentação de uma tese, demonstrando ao avaliador o posicionamento a ser defendido na argumentação. No caso da proposta, seria interessante que essa tese defendesse as contribuições da arte de maneira positiva, sendo uma forma de interpretação subjetiva da realidade, como no Romantismo, ou uma percepção crítica de um contexto social, como no Realismo.

No desenvolvimento, o candidato iria aprofundar uma argumentação que defendesse o posicionamento apresentado na introdução, de modo a convencer o leitor. Com isso, podem-se apresentar argumentos sobre as contribuições benéficas da arte. Isso poderia ser comprovado por meio de uma argumentação que demonstre como a arte (por exemplo, a literatura) permite que o leitor tenha contato com uma visão mais subjetiva da realidade.

Nesse sentido, muitas vezes, os artistas têm um olhar subjetivo da realidade como uma forma de embelezar as situações do cotidiano, tornando mais visível aquilo que, em geral, passa despercebido pela percepção da maioria das pessoas, cegas pela rotina exaustiva da sociedade pós-moderna. Essa percepção da realidade como forma de fuga da rotina é ratificada por Nietzsche: “A arte existe para que a verdade não nos destrua”, bem como por Immanuel Kant: “A arte não é a representação de uma bela coisa, mas a bela representação de uma

coisa”. Logo, essa percepção subjetiva da realidade condiz com as ideologias do Romantismo, que exaltava o sentimentalismo e a valorização das emoções como uma forma de ir além das aparências.

Ademais, o teor crítico de muitas obras artísticas pode servir como uma forma de extrapolação da realidade social vigente, implementando uma visão crítica da realidade, com a função de alertar as pessoas. Essa percepção mais crítica é uma das preocupações dos artistas do Realismo, que tentam representar a realidade do modo como ela é, destituída de idealizações e subjetivismos. Esse criticismo dos artistas pode alertar as pessoas a saírem de seu estado de cegueira social, como apresentado por José Saramago, em *Ensaio sobre a cegueira*, sendo um estímulo para a mudança do contexto social vigente. Além disso, a percepção do artista com os personagens vai além de sua aparência física ou de suas ações no dia a dia, ela parte de uma análise mais psicológica dos indivíduos, com o fito de explicar situações comuns aos relacionamentos interpessoais.

Por fim, o parágrafo de conclusão tem a função de retomar o posicionamento apresentado na introdução e a argumentação desenvolvida no texto. Isso pode ser feito por meio de uma síntese dos argumentos apresentados nos parágrafos de desenvolvimento, dando um fechamento à reflexão defendida. Outra forma de concluir o texto seria apresentar uma sintética solução, demonstrando como as pessoas podem ter uma visão da realidade mais parecida com a dos artistas.

Portanto, a arte, como expressão da realidade a partir da visão de um autor, que tem a finalidade de gerar discussões e reflexões, muitas vezes, quebrando paradigmas sociais, deve ser vista como uma importante contribuição para a sociedade poder olhar a realidade de uma forma mais subjetiva e crítica. Por isso, a prova de Redação do IME abordou um tema de suma importância: a arte, tão criticada e mal compreendida no contexto moderno, levando os candidatos a refletirem sobre o seu papel.

## Inglês

PARA AS QUESTÕES DE 21 A 30, ESCOLHA A ALTERNATIVA QUE COMPLETA O TEXTO 1 CORRETAMENTE (VALOR 0,4 / QUESTÃO)

### Texto 1

#### FROM FILM STAR TO FREQUENCY-HOPPING INVENTOR

I'm guessing that some younger readers \_\_\_\_\_ (21) \_\_\_\_\_ who Hedy Lamarr was. Old-timers remember her as a popular Hollywood star of the mid-20<sup>th</sup> century. Characterized by MGM studio mogul Louis B. Mayer as “the most beautiful girl in the world,” a title said to originally have been bestowed by stage director Max Reinhardt, she appeared in some 25 Hollywood films between 1938 and 1958.

\_\_\_\_\_ (22) \_\_\_\_\_ her fans and many of her Hollywood colleagues was her creative side. They were unaware that \_\_\_\_\_ (23) \_\_\_\_\_ the cameras were not rolling, Ms. Lamarr might be at home at her drawing board, diligently working at some concept that might lead to a commercial product or a patentable invention.

\_\_\_\_ (24) \_\_\_\_ an admirer of Hedy Lamarr the movie star (I particularly remember her in “Ziegfeld Girl,” costarring James Stewart, Judy Garland, Lana Turner, and Tony Martin, and “H. M. Pulham, Esq.,” with Robert Young and Van Heflen), I too was unaware of her innovative proclivities until 1984, when historian of cryptology David Kahn authored an article in *IEEE Spectrum*. It revealed to the uninitiated the existence of a 1941 patent \_\_\_\_ (25) \_\_\_\_ to Lamarr and her co-inventor, George Antheil, based on frequency-hopping and titled “Secret Communication System.” World War II \_\_\_\_ (26) \_\_\_\_ in Europe, and Hedy, a native Austrian, left her munitions magnate husband Friedrich Mandl and relocated to the United States in 1937. As Hitler moved relentlessly in his attempt to conquer most of northern Europe, she was appalled by the German U-boat sinking of the SS City of Benarus. (...). She considered quitting the movie business and offering her services to the newly organized National Inventors Council (NIC), \_\_\_\_ (27) \_\_\_\_ to evaluate technology that could be useful in wartime, and chaired by inventor Charles Kettering. She did \_\_\_\_ (28) \_\_\_\_, however.

In Hollywood, Hedy had met George Antheil, not an engineer but a composer with “a fair grasp of electronics,” as historian Kahn expressed it. Antheil joined her in her attempt to devise a jam-proof guidance system for Allied torpedoes. A year before Pearl Harbor, she told Antheil she knew “a good deal about new munitions and various secret weapons,” presumably knowledge acquired while she was privy to discussions between Mandl and his munitions agents.

While not on the movie set, Lamarr would work with Antheil in her apartment to move her idea from concept to a practical system. In her early working documents a reference is made to the 116RX, the 1939 Philco radio console that featured the first wireless remote control (termed the Mystery Control and offering the listener options to select up to eight stations, a volume control, and an off switch). This \_\_\_\_ (29) \_\_\_\_ just one among several inputs that inspired her to \_\_\_\_ (30) \_\_\_\_ the idea she called “hopping of frequencies” (...)

CHRISTIANSEN, D. Adaptado de *From Film Star to Frequency-Hopping Inventor*. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. Disponível em: <<http://te.ieeeusa.org/2012/Apr/backscatter.asp>>. Acesso em: 15/06/2018.

#### 21ª QUESTÃO

- |                       |                     |
|-----------------------|---------------------|
| (A) ought to know     | (D) will have known |
| (B) must not know     | (E) may not know    |
| (C) should have known |                     |



### VERBOS MODAIS

Na construção do período, está claro que a ideia é de explicitar que “alguns jovens leitores talvez não conheçam” a artista em questão. Isso se justifica uma vez que a ideia do texto é a de apresentar a Hedy Lamarr ao público geral, que desconhece não somente ela, mas também algumas curiosidades de sua vida artística.

**Resposta correta: (E)**

## 22ª QUESTÃO

- (A) Spotted by  
 (B) Unknown to  
 (C) Shadowed under  
 (D) Disguised as  
 (E) Characterized by

 **Comenta**

### VOCABULÁRIO / PREPOSIÇÕES

Tendo em vista a necessidade de salientar que muitos fãs e admiradores de Hedy Lamarr não conheciam outros talentos da atriz além de seus trabalhos em Hollywood, a questão pede para que o trecho seja completado por uma expressão que indique essa “desinformação” por parte do público. A expressão seria “unknown to”, que indica tais habilidades de Hedy que eram desconhecidas por seu fãs.

**Resposta correta: (B)**

## 23ª QUESTÃO

- (A) before  
 (B) during  
 (C) for  
 (D) when  
 (E) after

 **Comenta**

### PREPOSIÇÕES

Aplicando as alternativas, uma a uma, evidenciamos que a alternativa D (*when*) é a única que constrói, dentro do período, um sentido conveniente. Espera-se que o leitor entenda que “QUANDO as câmeras não estavam filmando”, a atriz produzia outros trabalhos paralelos à carreira de atriz.

**Resposta correta: (D)**

## 24ª QUESTÃO

- (A) Despite  
 (B) Since  
 (C) Although  
 (D) Anyhow  
 (E) Unless

 **Comenta**

### LINKING WORDS

Listando as possibilidades de encaixe, alternativa por alternativa, temos a conjunção *despite* como única opção correta. Colocando-a dentro do período, é possível observar uma construção frasal coesa: “APESAR (de ser) um admirador de Hedy Lamarr (como) estrela do cinema, eu também...”.

**Resposta correta: (A)**

## 25ª QUESTÃO

- (A) transferred
- (B) tackled
- (C) addressed
- (D) authorized
- (E) issued



## VOCABULÁRIO (VERBOS)

A questão pede por um verbo que complete o período corretamente, levando em consideração, também, que a construção verbal esteja em harmonia com a preposição *to*, que segue logo depois da lacuna a ser completada. A preposição indica que uma patente foi emitida para Hedy Lamarr. É necessário observar que o verbo *issued* (emitido) é a única opção para completar o período uma vez que *addressed* e *transferred*, que poderiam ser vistos como sinônimos, não fazem jus ao sentido da frase, já que patentes não são encaminhadas.

**Resposta correta: (E)**

## 26ª QUESTÃO

- (A) can have raged
- (B) should have been raging
- (C) would have raged
- (D) had been raging
- (E) could be raging



## TEMPOS VERBAIS

Para completar o período em questão, o leitor deve atentar-se ao fato de que o assunto da frase é sobre algo que ocorreu no passado, além de ficar claro que o começo da Segunda Guerra Mundial aconteceu antes da mudança de país de Hedy. Sendo assim, o único tempo verbal que se encaixaria em tal situação seria o *Past Perfect*. No entanto, fica claro que a guerra não só ocorreu, mas perdurou, fazendo necessário usar a variante desse tempo verbal, *Past Perfect Continuous*. Ou seja, usamos, nesse período, a locução verbal *had been raging*.

**Resposta correta: (D)**

## 27ª QUESTÃO

- (A) exempted  
 (B) designed  
 (C) dismissed  
 (D) entwined  
 (E) chartered



## VOCABULÁRIO

A lacuna a ser completada deverá ser preenchida com uma informação relativa ao *National Inventors Council* (NIC) e não à Hedy Lamarr. Sendo assim, é necessário entender que essa empresa terceirizou serviços na tecnologia bélica para o Governo norte-americano. Ou seja, afirmamos que a empresa foi CONTRATADA (*chartered*) para a prestação de tais serviços.

Resposta correta: (E)

## 28ª QUESTÃO

- (A) owt  
 (B) neither  
 (C) both  
 (D) any  
 (E) each



## CONJUNÇÃO CORRELATIVA

Para completarmos o período, é necessário voltar às ações intituladas à Hedy Lamarr. Previamente, o texto afirma que a atriz/inventora poderia fazer duas ações: a primeira seria deixar o seu marido e o seu país, e a segunda seria juntar-se ao NIC. Levando em consideração a construção verbal da última frase, a única opção que se encaixa é *neither*, sugerindo que Hedy não fez nenhuma das duas ações.

Resposta correta: (B)

## 29ª QUESTÃO

- (A) wouldn't have been  
 (B) could have been  
 (C) must have never been  
 (D) hadn't ever been  
 (E) had almost been



## VERBOS MODAIS

Esse trecho a ser completado acaba por entrar em acordo de coesão com a lacuna da questão 30. Entende-se que o evento anteriormente citado no texto (a sugestão do estudo tecnológico acerca do primeiro controle remoto sem fio) PODERIA ter sido um dos primeiros projetos que a motivaram a seguir com sua carreira de inventora. O verbo modal que atribui esse sentido de possibilidade no passado seria o *could*.

Resposta correta: (B)

## 30ª QUESTÃO

- (A) come up with
- (B) come down on
- (C) come through
- (D) come over
- (E) come about

**VERBOS FRASAIS**

O trecho a ser completado entra em acordo de coesão com a lacuna da questão 29, uma vez que o fragmento anterior explicitava que Hedy Lamar havia usado os projetos anteriores, trabalhados com George Antheil, como inspiração para os seus futuros projetos. Entende-se, por fim, que isso havia dado a inspiração a ela para inventar o que havia chamado de *hopping with frequencies*. A expressão *Come up with the idea* significa que Hedy veio com a ideia do seu novo projeto.

**Resposta correta: (A)**

**PARA AS QUESTÕES 31 A 33, RESPONDA DE ACORDO COM O TEXTO 2 A SEGUIR.**

**Texto 2****CORPORATE CONTROL AND GLOBAL GOVERNANCE OF MARINE GENETIC RESOURCES****INTRODUCTION**

The prospect of the ocean generating a new era of “blue growth” is increasingly finding its way into national and international policy documents around the world and has spurred a rush to claim ocean space and resources. If economic activities in coastal and offshore areas are to expand in an equitable and sustainable manner, in line with the Sustainable Development Goals (SDGs), progress is needed toward addressing multiple and potentially conflicting uses of ocean space within national jurisdictions, in addition to developing a consistent and transparent legal framework for the vast areas beyond national jurisdiction (ABNJ). These areas cover 64% of the world’s ocean and 47% of the Earth’s surface yet remain poorly understood or described.

Marine organisms have evolved to thrive in the extremes of pressure, temperature, chemistry, and darkness found in the ocean, resulting in unique adaptations that make them the object of commercial interest, particularly for biomedical and industrial applications. By 2025, the global market for marine biotechnology is projected to reach \$6.4 billion, spanning a broad range of commercial purposes for the pharmaceutical, biofuel, and chemical industries. One way to ensure exclusive access to these potential economic benefits is through patents associated with “marine genetic resources” (MGRs). Although the term MGRs has never been formally

described, it suggests a subset of “genetic resources”, which have been defined under the Convention on Biological Diversity (CBD) as “genetic material of actual or potential value”.\_\_\_\_\_ (33)\_\_\_\_\_. The adoption of the Nagoya Protocol in 2010 represented an important step within the international policy arena to define obligations associated with monetary and nonmonetary benefit sharing of genetic resources and their products sourced from within national jurisdictions. No such mechanism currently exists for ABNJ.

( . . . )

BLASIAK, R.; JOUFFRAY, JB.; WABNITZ, C.; SUNDSTROM, E. e OSTERBLOM, H. Adaptado de **Corporate control and global governance of marine genetic resources**. In: Science Advances. Disponível em <<http://advances.sciencemag.org/content/4/6/eaar5237.full>>. Acesso em: 07/08/2018.

### 31ª QUESTÃO

Choose the correct option.

- (A) Ocean space and resources have had their ownership completely established.
- (B) There is no legal doctrine regarding the uses of ocean space beyond national jurisdiction.
- (C) Although “blue growth” is not economically attractive, some organizations need to own ocean space.
- (D) A good deal of knowledge has already been gathered about ocean space beyond national jurisdiction.
- (E) Corporate institutions have studied more than half of our planet's surface.



## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

A leitura do texto permite compreender, a partir da terceira linha, que, se as atividades econômicas em áreas costeiras e de mar aberto devem expandir de forma equitativa e sustentável, uma doutrina legal de uso dos oceanos ainda carece de regulamentação para que conflitos potenciais relativos ao uso dessas águas sejam evitados, o que está de acordo com o que encontramos na alternativa B da questão, pois deduzimos que tal doutrina legal não existe atualmente.

**Resposta correta: (B)**

## 32ª QUESTÃO

Choose the correct option.

- (A) Corporations intend to use patents associated with deep-sea marine genetic resources to guarantee they are the only ones to profit.
- (B) Industries willing to use the genetic material of organisms which have adapted to deep sea environment must follow the Nagoya Protocol no matter where they are exploring the sea.
- (C) The international policy has already established the most profitable type of commercial use for some specific genetic resources.
- (D) Equitable and sustainable development depend on laws defining the non-commercial use of the genes from marine organisms.
- (E) Pharmaceutical, biofuel, and chemical industries are obliged to invest in a broad range of the marine environment until 2025.



### INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

A leitura das linhas 13 à 15 do texto permite encontrar a informação de que uma maneira de garantir acesso exclusivo aos potenciais benefícios econômicos (a biotecnologia marinha) é por meio de patentes associadas com os recursos da genética marinha, o que encontra respaldo na alternativa A da questão.

**Resposta correta: (A)**

## 33ª QUESTÃO

Choose the appropriate continuation for "Although the term MGRs has never been formally described, it suggests a subset of 'genetic resources,' which have been defined under the Convention on Biological Diversity (CBD) as 'genetic material of actual or potential value'."

- (A) However, their substantial financial resources enable them to develop commercial applications despite uncertain timelines and returns on investment.
- (B) Past research has focused on countries where patents have been registered rather than the individual actors registering them.
- (C) Because of this, transnational corporations have a unique ability to capitalize on and monopolize markets characterized by global scope and complexity.
- (D) The registration of patent claims involving such resources constitutes an opaque and rapidly evolving frontier where the worlds of science, policy, and industry meet.
- (E) This facilitates the acquisition or collection of samples, for example, chartering vessels for a week-long sampling cruise of deep-water corals estimated in 2013 at \$455,000.



## COESÃO TEXTUAL

A questão solicita que seja escolhida a alternativa que apresenta a frase que complementa correta e coerentemente o espaço em branco do texto. Partindo da ideia exposta na frase anterior (linhas 15 a 17), nota-se que há informações sobre a chamada CBD, sigla em inglês para Convenção sobre Diversidade Biológica, que estabelece alguns critérios para o uso de recursos genéticos dos oceanos. Dessa forma, a alternativa D é que apresenta a frase que está em sintonia com a ideia exposta na passagem anterior, uma vez que é expressa a noção do que seria necessário para o registro dessa patente marinha.

**Resposta correta: (D)**

PARA AS QUESTÕES 34 E 35, RESPONDA DE ACORDO COM O TEXTO 3 A SEGUIR.

### Texto 3

#### THE DISCOVERY OF PENICILLIN—NEW INSIGHTS AFTER MORE THAN 75 YEARS OF CLINICAL USE

##### ABSTRACT

After just over 75 years of penicillin's clinical use, the world can see that its impact was immediate and profound. In 1928, a chance event in Alexander Fleming's London laboratory changed the course of medicine. However, the purification and first clinical use of penicillin would take more than a decade. Unprecedented United States/Great Britain cooperation to produce penicillin was incredibly successful by 1943. This success overshadowed efforts to produce penicillin during World War II in Europe, particularly in the Netherlands. Information about these efforts, available only in the last 10–15 years, provides new insights into the story of the first antibiotic. Researchers in the Netherlands produced penicillin using their own production methods and marketed it in 1946, which eventually increased the penicillin supply and decreased the price. The unusual serendipity involved in the discovery of penicillin demonstrates the difficulties in finding new antibiotics and should remind health professionals to expertly manage these extraordinary medicines.

(...)

GAYNES, R. *The Discovery of Penicillin—New Insights After More Than 75 Years of Clinical Use*. In: Science, 2017. Disponível em: <[http://wwwnc.cdc.gov/eid/article/23/5/16-1556\\_article](http://wwwnc.cdc.gov/eid/article/23/5/16-1556_article)>. Acesso em: 26/06/2018.

## 34ª QUESTÃO

Choose the correct option.

- (A) Dutch researchers produced penicillin for it was cheaper than before. Concerning the supply of it, the increase was automatic.
- (B) The first clinical use of penicillin was not immediate owing to the impact of its discovery. This delay changed the History of Medicine.
- (C) The efforts by the Netherlands to produce the new drug weren't regarded as valuable until around a decade ago.
- (D) It is impossible that penicillin's first clinical use dates back more than 75 years.
- (E) The US and Great Britain succeeded in producing penicillin right after 1943.

 **Comenta**

## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

O texto traz um resumo de trabalho científico sobre novos achados sobre a descoberta da penicilina depois de mais de 75 anos de uso clínico do antibiótico. A leitura do texto permite saber que os esforços feitos pelos holandeses para produzir a nova droga não foi tida como valiosa até, aproximadamente, uma década atrás (*in the last 10 – 15 years*), informação disposta na alternativa C da questão.

### Resposta correta: (C)

## 35ª QUESTÃO

Choose the correct option.

The meaning of the word "**serendipity**" in the sentence: "The unusual **serendipity** involved in the discovery of penicillin demonstrates the difficulties in finding new antibiotics (...)" is:

- (A) strategy.
- (B) fluke.
- (C) nuisance.
- (D) plan.
- (E) mishap.

 **Comenta**

## SINONÍMIA

A questão pede que seja escolhido o item que traz um sinônimo para o vocábulo *serendipity*. Essa palavra significa algo que acontece acidentalmente, mas cujo resultado é algo feliz e fortuito. Não há respaldo na alternativa A (estratégia), na alternativa C (exasperação), na alternativa D (plano) ou mesmo na E (acidente infeliz). A resposta correta está no item B, pois a palavra *fluke* tem o mesmo sentido de "descoberta acidental", sem, no entanto, especificar se esse acidente é feliz ou infeliz, mas sim algo que aconteceu por meio de sorte.

### Resposta correta: (B)

PARA AS QUESTÕES 36 a 40 , RESPONDA DE ACORDO COM O TEXTO 5 A SEGUIR.

#### Texto 4

### FRANK WHITTLE AND THE INVENTION OF THE JET ENGINE: SIX PLACES TO TRACE HIS GENIUS

It was, in many ways, a very British sort of achievement. When the turbine began to spin on the “WU” – the prototype jet engine developed by the Coventry-born engineer Frank Whittle – it was a moment which changed the world. Had you been passing through the byways of Rugby, in Warwickshire, more than 80 years ago, you might even have heard it. A thrum of mechanics in sync, building and building, growing in intensity to become a roar; a giddy howl which would permanently alter the way we journey around our planet.

And yet it might so easily not have happened. Whittle’s triumph – on April 12, 1937 – was garnered in the face of official indifference and scientific doubt, and was only pulled off by a merest financial hair’s breadth, with the Second World War crowding in on all sides.

( . . . )

Here was a visionary who began fomenting his design for a jet engine as early as 1927, and patented it in 1930, yet had to swim against the current after seeing his idea pooh-poohed by the UK’s Air Ministry – which, upon seeing the blueprint in 1929, deemed it “impracticable.”

Undeterred, Whittle took his own path. In January 1936, he founded a private company, Power Jets Ltd, with aeronautical engineer Rolf Dudley Williams and retired RAF officer James Collingwood Tinling. With £2,000 of funding from O.T. Falk & Partners – an investment bank which was known for taking risks – the trio began converting what had been decried as fantasy into reality.

That first blur of blades as the WU (Whittle Unit) screamed into life was followed by a series of leaps forward. The Air Ministry placed its first order for Whittle’s brainwave in January 1940. The first jet-powered British plane took off from RAF Cranwell, Lincolnshire, on May 15, 1941. The rest is so much history.

None of this occurred in isolation. The story of the jet engine can never be told without mentions of Maxime Guillaume, who secured a French patent for a jet engine with a gas turbine in 1921 (no prototype was ever produced as it was beyond the scope of existing technology), and of Hans Von Ohain, who beat Whittle to the punch by building the first fully operational jet engine in 1939 as Germany chased advantages in the global conflict.

( . . . )

RAF = Royal Air Force

LEADBEATER, C. Adaptado de **Frank Whittle and the invention of the jet engine: Six places to trace his genius.**

In: The Telegraph. Disponível em: <<https://www.telegraph.co.uk/travel/destinations/europe/united-kingdom/england/articles/frank-whittle-and-the-birth-of-the-jet-engine/>>. Acesso em: 08/06/2018.

## 36ª QUESTÃO

Choose the correct option.

- (A) Some 80 years ago, someone could have witnessed the jet engine tests if the person had been in Rugby.
- (B) The spinning of the turbine in 1937 would not be a milestone in history.
- (C) What happened in the city where Whittle was born changed the world 80 years after it, and this is very British.
- (D) Eventually, Whittle could prove there had been a reason for people to doubt his invention could work.
- (E) The giddy howl justified the existence of official indifference, but not the way we travel today.

 **Comenta****INTERPRETAÇÃO DE TEXTO**

O texto conta um pouco da história da invenção do motor a jato (*jet engine*). Nas linhas 3 e 4 temos uma frase no 3º condicional, por meio de uma inversão, que diz que, se alguém estivesse passando pela localidade de Rugby na Inglaterra há mais 80 anos, poderia ter ouvido os testes iniciais do motor a jato. (*Had you been passing through the byways of Rugby, in Warwickshire, more than 80 years ago, you might even had heard it.*). Portanto, a alternativa A encontra respaldo nessa passagem do texto.

**Resposta correta: (A)**

## 37ª QUESTÃO

Choose the correct option.

- (A) People seemed to want to sponsor Whittle. This is the only reason why his triumph was garnered.
- (B) Whittle triumphed a decade after he got funds to be invested in his project.
- (C) A large amount of money was available for his project before the Second World War began.
- (D) Whittle's problems had to do with low amount of money and contempt for his project.
- (E) If Williams and Tinsley had been convinced of Whittle's ideas, they would have contributed to the project.

 **Comenta****INTERPRETAÇÃO DE TEXTO**

O segundo parágrafo do texto indica as dificuldades encontradas por Frank Whittle para levar adiante sua ideia de desenvolver um motor a jato. Na leitura do parágrafo encontramos o descaso oficial (*official indifference*), dúvida científica (*scientific doubt*) e dificuldade financeira (*the merest financial hair's breadth*), o que está de acordo com o que está disposto na alternativa D da questão. Vale ressaltar que o vocábulo *contempt*, presente na alternativa, é um falso cognato, significando desprezo.

**Resposta correta: (D)**

## 38ª QUESTÃO

Choose the correct option.

- (A) Whittle patented his invention right after the test proved he was right and, consequently, he had money to found a company.
- (B) Whittle had been swimming against the current for three years when the thrum that became a roar meant a real change in History.
- (C) It's not such a surprise O.T. Falk & Partners funded a project that had been seen with a certain disdain since it was a bank which took risks.
- (D) At the time Whittle's project was funded, another jet engine project had been patented in France ten years before. However, there was no prototype of that.
- (E) The institution that dismissed Whittle's ideas is not the same that ordered him a jet plane in 1940.



## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

O texto afirma no seu 4º parágrafo que Whittle, com certa indecisão, tomou seu próprio caminho e, em 1936, fundou uma empresa privada com outros sócios e com recursos financeiros oriundos de um banco de investimentos, O.T. Falk & Partners, que era conhecido por se arriscar em negócios desse tipo. Dessa forma, a alternativa C é aquela a ser marcada, pois essa traz a informação de que não causou surpresa que o banco tenha investido nesse arriscado negócio.

**Resposta correta: (C)**

## 39ª QUESTÃO

Choose the correct option.

The sentence: "That first blur of blades as the WU (Whittle Unit) screamed into life was followed by a series of leaps forward" means that

- (A) after the project was conceived, there were many other difficulties.
- (B) in 1939, the gap between engine blades still had to be adjusted.
- (C) the British jet took off ten years after a number of mistakes occurred.
- (D) before 1940, the orders for what had been decried as fantasy were placed.
- (E) after the tests, a number of facts led to a positive progress.



## INTERPRETAÇÃO DE TEXTO

A questão solicita que seja feita a interpretação de uma frase retirada do texto, que diz: "Aquele primeiro protótipo de lâminas quando a WU (Whittle Unit) começou a existir foi seguido por uma série de saltos para a frente". A alternativa E apresenta uma frase que condiz com essa sentença, isto é, que "após testes, um número de fatos levou a um avanço promissor".

**Resposta correta: (E)**

## 40ª QUESTÃO

Choose the correct option.

- (A) The fact that more than a person developed ideas that couldn't be accomplished explains why Guillaume couldn't provide a prototype in 1921.
- (B) The story of the jet engine needs to mention the other people that were working together with Whittle's group in the WU (Whittle Unit).
- (C) The idea of sound appears three times in the text to refer to the fact that the project was accepted.
- (D) Whittle's building a prototype engine took place three years before Von Ohain's building an operational jet engine.
- (E) Von Ohain put his idea into practice to be used by England's enemy before Whittle and his partners.



## INTERPRETAÇÃO TEXTUAL

Baseado na leitura do texto, averiguamos que a alternativa E é a única correta entre todas. Usando as marcas tipográficas do texto (datas), entende-se que o projeto britânico só foi lançado, de fato, em 1941. Por outro lado, o projeto alemão de Von Ohain conseguiu ser lançado anteriormente, em 1939. Sendo assim, está correto o que se afirma na alternativa E.

**Resposta correta: (E)**

## PRODUÇÕES DE TEXTO

### TEMA 1

Escreva um parágrafo **EM INGLÊS** coerente, coeso e original, de **30 a 50** palavras, que termine com o seguinte período:

"Somewhere, something is waiting to be known."

Carl Sagan  
(American astronomer and science writer)

### TEMA 2

Escreva um parágrafo **EM INGLÊS** coerente, coeso e original, de **30 a 50** palavras, expressando sua opinião sobre a citação abaixo.

"You are successful the moment you start moving toward a worthwhile goal."

Chester Carlson  
( American physicist, inventor of xerography)



## PRODUÇÃO DE TEXTO

### TEMA 1

Esta questão requer do candidato a habilidade de produzir um parágrafo em inglês coerente, coeso e original, de 30 a 50 palavras, que termine com o período “*Somewhere, something is waiting to be known.*”, de autoria do astrônomo americano Carl Sagan. No parágrafo deve ser exposta uma situação cuja finalização leve ao sentido da frase final (em algum lugar, algo está esperando para ser conhecido), mantendo a coesão e a coerência com a sentença final do parágrafo.

### TEMA 2

Esta questão requer do candidato a habilidade de produzir um parágrafo em inglês coerente, coeso e original, de 30 a 50 palavras, expressando a opinião sobre a citação de Chester Carlson, físico americano e inventor da xerografia, de que “Você será bem-sucedido no momento em que começar a se movimentar em direção a um objetivo que vale a pena.”