IME – 2017/2018

PROVAS OBJETIVAS – 1º DIA

PROVA DISCURSIVA – 2º DIA

PROVA DISCURSIVA – 3º DIA

PROVA DISCURSIVA – 4º DIA

PROVA MISTA – 5º DIA

MATEMÁTICA

1ª QUESTÃO

Considere as alternativas:

I. O inverso de um irracional é sempre irracional.

II. Seja a função f: $A \to B$ e X e Y dois subconjuntos quaisquer de A, então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

III. Seja a função f: $A \to B$ e X e Y dois subconjuntos quaisquer de A, então $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

IV. Dados dois conjuntos A e B não vazios, então $A \cap B = A$ se, e somente se, $B \subset A$.

São corretas:

(A) I, apenas.

(B) I e III, apenas.

(C) II e IV, apenas.

(D) I e IV, apenas.

(E) II e III, apenas.

Obs: f(Z) é a imagem de f no domínio Z.

Comenta

CONJUNTOS

(I) **(Correto)**

Se $X \notin \mathbb{Q}$ e $\frac{1}{X} \in \mathbb{Q}$, então, como $1, \frac{1}{X} \in \mathbb{Q}$, e a divisão entre dois racionais é sempre racional, então, $\frac{1}{\frac{1}{X}} = X \in \mathbb{Q}$, um absurdo.

Observe que $X, \frac{1}{X} \neq 0$, pois **X** tem inversa. Por isso, a divisão é válida.

II. **(Incorreto)**

Tome, por exemplo, $f : \overbrace{\{1, 2\}}^{A} \to \overbrace{\{1\}}^{B}$, como sendo a função constante. Se $X = \{1\}$ e $Y = \{2\}$, temos $f(X) = f(Y) = \{1\} \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = \{1\}$.

Porém, $X \cap Y = \varnothing \Rightarrow f(X \cap Y) = f(\varnothing) = \varnothing \neq \{1\}$.

III. **(Correto)**

Se $z \in f(X \cup Y)$, então $z = f(b)$, com $b \in X \cup Y$. Temos 2 casos:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ b \in X \Rightarrow z = f(b), b \in X \Rightarrow z \in f(X) \\ \bullet\ b \in Y \Rightarrow z = f(b), b \in Y \Rightarrow z \in f(Y) \end{array}\right\} \Rightarrow z \in f(X) \cup f(Y)$$

Isso demonstra que $\boxed{f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)}\ \boxed{(1)}$

Por outro lado, se $z \in f(X) \cup f(Y)$, temos 2 casos:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ z \in f(X) \Rightarrow z = f(b), b \in X \\ \bullet\ z \in f(Y) \Rightarrow z = f(b), b \in Y \end{array}\right\} \Rightarrow z = f(b),\ b \in X \cup Y \Rightarrow z \in f(X \cup Y)$$

Isso demonstra que $\boxed{f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)}\ \boxed{(2)}$

De (1) e (2), $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

IV. **(Incorreto)**

Tome , por exemplo, $A = \{1\}$ e $B = \{1, 2\}$.
Daí, $A \cap B = \{1\} = A$, mas $\{1, 2\} \not\subset \{1\} \Rightarrow B \not\subset A$.

Resposta correta: (B)

2ª QUESTÃO

Seja x um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base x é 1041 e na base x-1 é 1431, então a sua representação na base binária é:

(A) 1 0 0 0 1 1 1 1

(B) 1 1 0 1 1 0 1 1

(C) 1 1 1 0 0 1 1 1

(D) 1 1 0 1 1 1 1 0

(E) 1 1 1 1 0 0 0 1

Comenta

TEORIA DOS NÚMEROS, BASES NUMÉRICAS

- $N = (1041)_x = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 4x + 1 = x^3 + 4x + 1 \quad (1)$
- $N = (1431)_{x-1} = 1 \cdot (x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 =$
  $= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 4x^2 - 8x + 4 + 3x - 3 + 1 = x^3 + x^2 - 2x + 1 \quad (2)$

Igualando (1) e (2):

$x^3 + 4x + 1 = x^3 + x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 6$.
Como $x > 2$, segue que $\boxed{x = 6}$

Portanto, $N = (1041)_6 = 6^3 + 4 \cdot 6^1 + 1 = 241 = 128 + 64 + 32 + 16 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^0 = (11110001)_2$

Resposta correta: (E)

3ª QUESTÃO

A soma dos algarismos de X com a soma dos quadrados dos algarismos de X é igual a X. Sabe-se que X é um número natural positivo. O menor X possível está no intervalo:

(A) (0, 25]
(B) (25,50]
(C) (50,75]
(D) (75,100]
(E) (100, 125]

Comenta

TEORIA DOS NÚMEROS

Faça $x = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2\ a_1\ a_0}$, com $0 \le a_i \le 9$, $a_i \in \mathbb{Z}$ e $a_n \ne 0$

Assim: $\left(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0\right) + \left(a_n^2 + a_{n-1}^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2\right) = x \ge 10^n$

$\Rightarrow \underbrace{9+9+\cdots+9}_{(n+1)} + \underbrace{9^2+9^2+\cdots+9^2}_{(n+1)} \ge 10^n \Rightarrow 9\cdot(n+1) + 81\cdot(n+1) \ge 10^n$

$\Rightarrow 90\cdot(n+1) \ge 10^n \Rightarrow \boxed{n \le 2}$. Vejamos os casos:

1º caso: $n = 0 \Rightarrow a_0 + a_0^2 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow x = 0 \to$ Abs!

2º caso: $n = 1 \Rightarrow a_1 + a_0 + a_1^2 + a_0^2 = \overline{a_1 a_0} = 10a_1 + a_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + a_0^2 = 9a_1 \Rightarrow a_1^2 - 9a_1 + a_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 81 - 4a_0^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 4a_0^2}}{2} \Rightarrow \left(81 - 4a_0^2\right)$. Deve ser um quadrado perfeito $\Rightarrow$ Isso só ocorre quando $a_0 = 0$

$\Rightarrow a_1 = \dfrac{9 \pm 9}{2} \Rightarrow a_1 = 9 \Rightarrow x = 90 \Rightarrow 9 + 0 + 9^2 + a^2 = 90$. OK!

3º caso:

$n = 2 \Rightarrow a_2 + a_1 + a_0 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2 = \overline{a_2 a_1 a_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \le 3\cdot 9 + 3\cdot 81 = 270 \Rightarrow a_2 \le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \le 2 + 9 + 9 + 4 + 81 + 81 = 186 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = 1} \Rightarrow 1 + a_1 + \cancel{a_0} + 1 + a_1^2 + a_0^2 = 100 + 10a_1 + \cancel{a_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + a_0^2 = 9a_1 + 98 \Rightarrow a_1^2 - 9a_1 + \left(a_0^2 - 98\right) = 0 \Rightarrow \Delta = 81 - 4\cdot\left(a_0^2 - 98\right)$

$\Rightarrow \Delta = 473 - 4a_0^2 \Rightarrow a_1 = \dfrac{9 \pm \sqrt{473 - 4a_0^2}}{2} \Rightarrow \left(473 - 4a_0^2\right)$ Deve ser um quadrado perfeito.

Mas $\left(473 - 4a_0^2\right)$ só pode assumir os valores 473, 469, 457, 437, 409, 373, 329, 277, 217 e 149, nenhum dos quais é quadrado perfeito.

Portanto, só podemos ter x = 90.

Resposta correta: (D)

4ª QUESTÃO

Seja f(x) uma função definida nos conjunto dos números reais, de forma que f(1) = 5 e para qualquer x pertencente aos números reais $f(x+4) \geq f(x) + 4$ e $f(x+1) \leq f(x) + 1$. Se $g(x) = f(x) + 2 - x$, o valor de g(2017) é:

(A) 2
(B) 6
(C) 13
(D) 2021
(E) 2023

Comenta

EQUAÇÕES FUNCIONAIS E DESIGUALDADES

I. $f(x+4) \geq f(x) + 4 \Rightarrow f(x+4) - x - 2 \geq f(x) + 4 - x - 2 = f(x) - x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{f(x+4) - (x+4) + 2}_{g(x+4)} \geq \underbrace{f(x) - x + 2}_{g(x)} \Rightarrow \boxed{g(x+4) \geq g(x), \forall\, x \in \mathbb{R}\ (1)}$

II. $f(x+1) \leq f(x) + 1 \Rightarrow f(x+1) - x + 1 \leq f(x) + 1 - x + 1 \Rightarrow \underbrace{f(x+1) - (x+1) + 2}_{g(x+1)} \leq \underbrace{f(x) - x + 2}_{g(x)}$
$\Rightarrow \boxed{g(x+1) \leq g(x), \forall\, x \in \mathbb{R}\ (2)}$

III. Se existisse $x_o \in \mathbb{R}$ satisfazendo $g(x_o + 1) < g(x_o)$, então:

$$g(x_o) \underset{(1)}{\leq} g(x_o + 4) \underset{(2)}{\leq} g(x_o + 3) \underset{(2)}{\leq} g(x_o + 2) \underset{(1)}{\leq} g(x_o + 1) < g(x_o) \Rightarrow g(x_o) < g(x_o)$$

O que é um absurdo. Portanto, a desigualdade em (2) é, na verdade, uma igualdade.
Assim, $\boxed{g(x+1) = g(x), \forall\, x \in \mathbb{R}}$

IV. Aplicando (*) 2016 vezes:
$g(2017) = g(2016) = g(2015) = ... = g(3) = g(2) = g(1) = 6 \Rightarrow g(2017) = 6.$

Resposta correta: (B)

5ª QUESTÃO

João e Maria nasceram no século XX, em anos distintos. A probabilidade da soma dos anos em que nasceram ser 3875 é:

(A) 2/99

(B) 19/2475

(C) 37/4950

(D) 19/825

(E) 19/485

Comenta

PROBABILIDADE

Século XX: De 1901 à 2000
Ano de nascimento de João: x
Ano de nascimento de Maria: y, com $x \neq y$

Assim, $x + y = 3875$
Casos favoráveis: (1901, 1974), (1902, 1973), ..., (1974, 1901)
Nº de casos favoráveis: 74
Nº de casos possíveis: $100 \cdot 99$

Logo: $P = \dfrac{74}{100 \cdot 99} \Rightarrow P = \dfrac{37}{4950}$

Resposta correta: (C)

6ª QUESTÃO

Se X e Y são números naturais tais que $X^2 - Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:

(A) 2008010

(B) 2012061

(C) 2034145

(D) 2044145

(E) 2052061

Comenta

TEORIA DOS NÚMEROS E FATORAÇÕES

Temos que:

$$x^2 - y^2 = 2017 \Rightarrow \underbrace{(x+y)}_{a}\underbrace{(x-y)}_{b} = 2017 \Rightarrow \boxed{ab = 2017}$$

Como x e y são naturais, **a** e **b** também são naturais. Como 2017 é primo, temos que, de (x), **a** e **b** são divisores positivos de 2017, positivos ou não, cujo produto é 2017.
Sendo {1, 2017} os divisores positivos de 2017, concluímos que (a, b) = (2017, 1), (pois $a = x + y > x - y = b$), donde: $a + b = 1 + 2017 = 2018$ e $a - b = 2017 - 1 = 2016$.
Mas, $x = \frac{a+b}{2}$ e $y = \frac{a-b}{2}$, o que implica $x = 1009$ e $y = 1008$.

Assim, $x^2 + y^2 = 1009^2 + 1008^2 = 2034145$.

Resposta correta: (C)

7ª QUESTÃO

Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 os quatro primeiros termos de uma P.A. com $x_1 = x$ e razão r, com $x, r \in \Re$. O determinante de $\begin{bmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ é:

(A) 0
(B) $x^4.r$
(C) $x^4.r^3$
(D) $x.r^4$
(E) $x.r^3$

Comenta

DETERMINANTES E P.A.

$(x_1; x_2; x_3; x_4)$ P.A.; $x_1 = r$; razão = r

$$\det M = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ 1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ 1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ 1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$\det M = x_1\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 \\ x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 \\ x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix} r & r & r \\ r & 2r & 2r \\ r & 2r & 3r \end{vmatrix}$$

$$\det M = x\cdot r\cdot r\cdot r\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det M = x\cdot r^3\cdot\begin{vmatrix} 2-1 & 2-1 \\ 2-1 & 3-1 \end{vmatrix} = xr^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det m = xr^3\cdot(2-1) \rightarrow \det M = xr^3$$

Resposta correta: (E)

8ª QUESTÃO

Seja a função $H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$H(s) = \frac{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}{b_2s^2 + b_1s + a_0}$$

com a_j e b_k reais, para $j = 0,1,2,3$ e $k = 0,1,2$. Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que $f(w)$ é a parte real de $H(iw)$ em que $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária e $w \in \mathbb{R}$. A afirmação correta a respeito de $f(w)$ é:

(A) $f(w)$ é uma função impar.

(B) $f(w)$ é uma função par.

(C) $f(w)$ é sempre negativa.

(D) $f(w)$ é sempre positiva.

(E) $f(w)$ é uma função periódica.

Comenta

NÚMEROS COMPLEXOS E PARIDADE DE FUNÇÃO

Solução:
De acordo com o enunciado, temos:

$$H(iw) = \frac{a_3\cdot i^3\cdot w^3 + a_2\cdot i^2\cdot w^2 + a_1\cdot i\cdot w + a_0}{b_2i^2\cdot w^2 + b_1\cdot i\cdot w + a_0}$$

$$H(iw) = \frac{\left(a_0 - a_2\cdot w^2\right) + \left(a_1w - a_3\cdot w^3\right)i}{\left(a_0 - b_2\cdot w^2\right) + b_1\cdot w\cdot i} \text{ x } \frac{\left(a_0 - b_2w^2\right) - b_1\cdot wi}{\left(a_0 - b_2w^2\right) - b_1wi}$$

Logo, a parte real de H(iw) = f(w)

$$f(w)=\frac{\left(a_0-a_2\ w^2\right)\cdot\left(a_0-b_2\ w^2\right)+\left(a_1w-a_3\ w^3\right)\cdot b_1w}{\left(a_0-b_2\ w^2\right)^2+b_1^2\cdot w^2}$$

$$f(w)=\frac{\left(a_0-a_2\ w^2\right)\cdot\left(a_0-b_2\ w^2\right)+\left(a_1\cdot b_1-a_3b_1\cdot w^2\right)\cdot w^2}{\left(a_0-b_2\ w^2\right)^2+b_1^2\cdot w^2}$$

Porém:

$$f(-w)=\frac{\left(a_0-a_2\cdot(-w)^2\right)\cdot\left(a_0-b_2\cdot(-w)^2\right)+\left(a_1b_1-a_3b_1\cdot(-w)^2\right)(-w)^2}{\left(a_0-b_2\cdot(-w)^2\right)^2+b_1^2\cdot(-w)^2}$$

Portanto:

$$f(-w)=\frac{\left(a_0-a_2\cdot w^2\right)\cdot\left(a_0-b_2\cdot w^2\right)+\left(a_1b_1-a_3b_1w^2\right)\cdot w^2}{\left(a_0-b_2\cdot w^2\right)^2+b_1^2\cdot w^2}$$

Como isso concluímos que:
f(–w) = f(w)
Logo, a função f(w) é par.

Resposta correta: (B)

9ª QUESTÃO

Seja P(x) o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A(2,-4+3\sqrt{3})$, $B(1,3\sqrt{2}-2)$, $C(\sqrt{2},\sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3},\sqrt{2})$. O resto da divisão de P(x) por (x-3) é:

(A) $8\sqrt{3}-5\sqrt{2}-6$

(B) $6\sqrt{3}-4\sqrt{2}-1$

(C) $9\sqrt{3}-8\sqrt{2}-2$

(D) $4\sqrt{3}-10\sqrt{2}-3$

(E) $4\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$

Comenta

POLINÔMIO

Usando interpolação de Lagrange, temos:

$$P_1(x)=\frac{(3\sqrt{2}-2)\cdot(x-2)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{3})}{(1-2)\cdot(1-\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{3})}$$

$$P_1(3) = \frac{(3\sqrt{2}-2)\cdot(3-2)\cdot(3-\sqrt{2})\cdot\cancel{(3-\sqrt{3})}^{\sqrt{3}}}{(-1)\cdot(1-\sqrt{2})\cdot\cancel{(1-\sqrt{3})}\cdot(-1)}\cdot\frac{(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})}$$

$$P_1(3) = \sqrt{3}\,\frac{(3\sqrt{2}-2)\cdot 1\cdot(\sqrt{2}-3)\cdot(1+\sqrt{2})}{1}$$

$$P_1(3) = (3\sqrt{6}-2\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+2-3-3\sqrt{2}) = (3\sqrt{6}-2\sqrt{3})\cdot(-1-2\sqrt{2})$$

$$P_1(3) = -3\sqrt{6}-6\cdot 2\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{6}$$

$$\boxed{P_1(3) = -10\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

$$P_2(x) = \frac{(-4+3\sqrt{3})\cdot(x-1)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{3})}{(2-1)\cdot(2-\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{3})}$$

$$P_2(3) = \frac{(-4+3\sqrt{3})\cdot(3-1)\cdot(3-\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{3})}{1\cdot(2-\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{3})}\cdot\frac{(2+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{3})}$$

$$P_2(3) = \frac{(-4+3\sqrt{3})\cdot\cancel{2}\cdot(3-\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{3})}{1\cdot\cancel{2}\cdot 1}$$

$$P_2(3) = (-4+3\sqrt{3})\cdot(6+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2)\cdot(6+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3)$$

$$P_2(3) = (-4+3\sqrt{3})\cdot(4+\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{3})$$

$$P_2(3) = (-4+3\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})\cdot(4+\sqrt{2})$$

$$P_2(3) = (-12-4\sqrt{3}+\sqrt{3}+9)\cdot(4+\sqrt{2}) = (-3+5\sqrt{3})\cdot(4+\sqrt{2})$$

$$P_2(3) = -12-3\sqrt{2}+20\sqrt{3}+5\sqrt{6}$$

$$\boxed{P_2(3) = -3\sqrt{2}+20\sqrt{3}+5\sqrt{6}-12}$$

$$P_3(x) = \frac{\sqrt{3}(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}-2)\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$P_3(3) = \frac{\sqrt{3}\cdot(3-1)\cdot(3-2)\cdot(3-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}-2)\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})}\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{1}+2)\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+2)\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$P_3(3) = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}\cdot(3-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1\cdot\cancel{(2-4)}\cdot(2-3)}$$

$$P_3(3) = 3\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot(2+2\sqrt{2}+\sqrt{2}+2)\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$P_3(3) = 3(\sqrt{3}-1)\cdot(4+3\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$P_3(3) = 3(4+3\sqrt{2})(\sqrt{6}+3-\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

$$P_3(3) = 3(\cancel{4}\sqrt{6}+\cancel{12}-\cancel{4}\sqrt{2}-\cancel{4}\sqrt{3}+\cancel{6}\sqrt{3}+\cancel{9}\sqrt{2}-\cancel{6}-\cancel{3}\sqrt{6})$$

$$P_3(3) = 3(5\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}+6) = 15\sqrt{2}+6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+18)$$

$$\boxed{P_3(3) = 15\sqrt{2}+6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+18}$$

$$P_4(x) = \frac{\sqrt{2}\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{1}\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

$$P_4(3) = \frac{\sqrt{2}\cdot(3-1)\cdot(3-2)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{1}\right)}{2\cdot(3-4)\cdot(3-2)}$$

$$P_4(3) = \frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{2}\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}\cdot(-1)\cdot(1)}$$

$$P_4(3) = \left(2-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+2\sqrt{3}+\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

$$P_4(3) = \left(2-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(5+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

$$P_4(3) = (10+6\sqrt{3}-15\sqrt{2}-9\sqrt{6})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$$P_4(3) = 10\sqrt{3}+10\sqrt{2}+18+6\sqrt{6}-15\sqrt{6}-30-27\sqrt{2}-18\sqrt{3}$$

$$\boxed{P_4(3) = -17\sqrt{2}-8\sqrt{3}-9\sqrt{6}-12}$$

Portanto, para encontrar o resto da divisão de P(x) por x – 3, basta calcular o P(3). Com isso:

$P(3) = P_1(3) + P_2(3) + P_3(3) + P_4(3)$

$$P(3) = \left(-10\sqrt{3}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}+20\sqrt{3}+5\sqrt{6}-12+15\sqrt{2}+6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+18-17\sqrt{2}-\right.$$
$$\left.-\ 8\sqrt{3}-9\sqrt{6}-12\right)$$

Logo:

$$\boxed{P(3) = 8\sqrt{3}-5\sqrt{2}-6}$$

Resposta correta: (A)

10ª QUESTÃO

Seja o seguinte sistema de equações, em que s é um número real:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - sx_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ sx_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Escolha uma faixa de valores de s em que as soluções do sistema são todas negativas.

(A) $s < -2$
(B) $-2 < s < 0$
(C) $0 < s < 1$
(D) $1 < s < 2$
(E) $s > 2$

Comenta

SISTEMAS LINEARES

Inicialmente, calculemos o determinante da matriz do sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -S \\ -2 & 1 & 1 \\ s & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot s + (-2)(-2)(-s) - (-s)(1)(s) - (1)(-2)\cdot 0 - (1)(1)(-2)$$

$$= s - 4s + s^2 + 2 = (s-1)(s-2)$$

Se $D = 0$, então $s = 1$ ou $s = 2$.

$s = 1$: O sistema fica:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 & (1) \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 & (2) \\ x_1 - 2x_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Somando (1) e (2): $-x_1 + 2x_2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 - 2x_2 = -1$ (absurdo, por (3)).
Logo, o sistema é impossível.

$s = 2$: O sistema fica:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 & (1)' \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 & (2)' \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 & (3)' \end{cases}$$

De (3)', $x_1 = x_2$, e usando isso em (1)' obtemos $x_1 = x_2 = x_3$.
Porém, em (2)': $-2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow 1 = 0$, absurdo.

Logo, o sistema é impossível.
Assim, estamos interessados apenas no caso em que $D \neq 0$.
Podemos, dessa forma, aplicar a regra de Cramer.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -s \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -s \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2s$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -s \\ -2 & 1 & 1 \\ s & 0 & 0 \end{vmatrix} = s\begin{vmatrix} 0 & -s \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = s^2$$

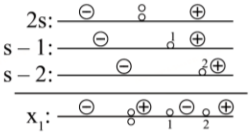
$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ s & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s & -2 \end{vmatrix} = s + 2$$

Assim:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2s}{(s-1)(s-2)};\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{s^2}{(s-1)(s-2)};\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{s+2}{(s-1)(s-2)}$$

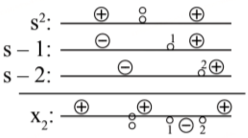
Vamos ao estudo de sinais:

$$x_1 < 0 \Rightarrow \frac{2s}{(s-1)(s-2)} < 0$$



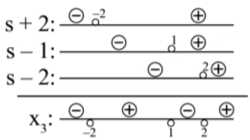
$S_1 = (-\infty, 0) \cup (1,2)$

$$x_2 < 0 \Rightarrow \frac{s^2}{(s-1)(s-2)} < 0$$



$S_2 = (1,2)$

$$x_3 < 0 \Rightarrow \frac{s+2}{(s-1)(s-2)} < 0$$



$S_3 = (-\infty, -2) \cup (1,2)$

Como desejamos x_1, x_2, $x_3 < 0$, o conjunto-solução é $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (1,2)$.

Resposta correta: (D)

11ª QUESTÃO

Determine o valor de a na expressão abaixo, sabendo-se que $0 < a < 1$,

$$\frac{1}{16}\log_a 256^{\operatorname{colog}_{(a^2)} 256^{\log_{(a^4)} 256^{\cdots^{\operatorname{colog}_{\left(a^{(2^{65})}\right)} 256}}}} = \operatorname{Im}\{Z\}$$

onde Z é um número complexo que satisfaz a equação:

$$2^{4033}Z^2 - 2^{2017}Z + 1 = 0.$$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{32}$ (E) $\frac{1}{64}$

Obs: Im(Z) é a parte imaginária do número complexo Z.

Comenta

LOGARITMO

Observe que:

$$\begin{cases} \log_c a^b = b \cdot \log_c a \\ \text{colog}_c a^b = -\log_c a^b = -b\log_c a = b \cdot \text{colog}_c a \end{cases}$$

Assim, a equação dada torna-se:

$$\frac{1}{16} \cdot \text{colog}_{a^{2^{65}}} 256 \cdot \log_{a^{2^{64}}} 256 \cdot \text{colog}_{a^{2^{63}}} 256 \cdot \text{colog}_{a^{2^{62}}} 256 \ldots \text{colog}_{a^{2^1}} 256 \cdot \text{colog}_a 256 = \text{Im}\{Z\}$$

$$\Rightarrow (-1)^{33} \cdot \log_{a^{2^{65}}} 256 \cdot \log_{a^{2^{64}}} 256 \cdot \log_{a^{2^{63}}} 256 \ldots \cdot \log_{a^{2^1}} 256 \cdot \log_{a^{2^0}} 256 = 16 \cdot \text{Im}\{Z\}$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot \frac{\log_a 256}{\log_a a^{2^{65}}} \cdot \frac{\log_a 256}{\log_a a^{2^{64}}} \cdot \frac{\log_a 256}{\log_a a^{2^{63}}} \ldots \cdot \frac{\log_a 256}{\log_a a^{2^1}} \cdot \frac{\log_a 256}{\log_a a^{2^0}} = 16 \cdot \text{Im}\{Z\}$$

$$\Rightarrow \frac{(-1) \cdot (\log_a 256)^{66}}{2^{65} \cdot 2^{64} \cdot \ldots \cdot 2^1 \cdot 2^0} = 16 \cdot \text{Im}\{Z\} \Rightarrow \boxed{-(\log_a^{256})^{66} = 16 \cdot 2^{\frac{65 \cdot 66}{2}} \cdot \text{Im}\{Z\}} \text{ ①}$$

Por outro lado, $2^{4033} Z^2 - 2^{2017} Z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^{4034} - 2^{4035} = -2^{4034} \Rightarrow Z = \dfrac{2^{2017} \pm 2^{2017} \cdot i}{2^{4034}} =$

$$\frac{2^{2017} \cdot (1 \pm i)}{2^{4034}} = \frac{1}{2^{2017}} \pm \frac{1}{2^{2017}} i \Rightarrow \boxed{\text{Im}\{Z\} = \pm \frac{1}{2^{2017}}} \text{ ②}$$

Substituindo ② em ①, obtemos que:

$-(\log_a 256)^{66} = 16 \cdot 2^{\frac{65 \cdot 66}{2}} \cdot \left(\pm \dfrac{1}{2^{2017}}\right) \Rightarrow$ devemos tomar o sinal negativo $\Rightarrow (\log_a 256)^{66} = \dfrac{2^{65 \cdot 33}}{2^{2013}} =$

$= \dfrac{2^{65 \cdot 33}}{2^{61 \cdot 33}} = 2^{4 \cdot 33} = 2^{2 \cdot 66} \quad \Rightarrow \log_a^{256} = \pm 2^2$. Como $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a 256 = -4 \Rightarrow a^{-4} = 256 \Rightarrow$

$a^4 = 2^{-8} \Rightarrow a = 2^{-2} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{1}{4}}$

Resposta correta: (A)

12ª QUESTÃO

A menor raiz real positiva da equação

$$arctg(x.tg(arcsen(\frac{3}{5}))) = \frac{2\pi}{x+2}$$

encontra-se no intervalo:

(A) (0,1]

(B) (1,2]

(C) (2,3]

(D) (3,4]

(E) (4,5]

Comenta

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS, CRESCIMENTO E DECRÉSCIMO

Se $\alpha = \text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, onde $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$. Assim:

$$\text{arctg}\left(x \cdot \text{tg}\left(\text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right) = \text{arctg}(x \cdot \text{tg}\alpha) = \text{arctg}\left(\frac{3x}{4}\right) = \frac{2\pi}{x+2} \ (*)$$

Analisando condição de existência: $-\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{x+2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} < \frac{1}{4} \Rightarrow |x+2| < 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6 < x$ ou $x > 2$. Como queremos analisar apenas a raiz positiva, consideremos $\boxed{x > 2}$ $\left(\text{ou seja, } \frac{2\pi}{x+2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

De (*), temos $\boxed{\text{tg}\left(\frac{2\pi}{x+2}\right) = \frac{3x}{4}}$ $\boxed{(**)}$

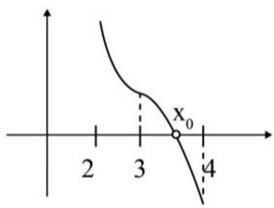
Como a função tangente é estritamente crescente em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, e a função $x \mapsto \frac{2\pi}{x+2}$ é estritamente decrescente para $x > 2$, então $x \mapsto \text{tg}\left(\frac{2\pi}{x+2}\right)$ é estritamente decrescente para $x > 2$. Sendo $x \mapsto -\frac{3x}{4}$ estritamente decrescente, concluímos que a função $\boxed{f(x) = \text{tg}\left(\frac{2\pi}{x+2}\right) - \frac{3x}{4}}$ é estritamente decrescente para $x > 2$. Como (**) é equivalente a $f(x) = 0$, devido ao decrescimento de **f** no intervalo $(2, +\infty)$, temos que , se existe $x_0 \in (2, +\infty)$ tal que $f(x_0) = 0$, então x_0 é único.

Além disso, note que:

$$\bullet f(3) = \text{tg}\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{3 \cdot 3}{4} \overset{(+)}{=} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} - \frac{9}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} - \frac{9}{4} = \frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{\sqrt{5}-1} - \frac{9}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - \frac{9}{4} =$$

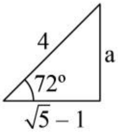
$$= \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2} - \frac{9}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2\sqrt{5}-3}{4} > 0$$



$\bullet f(4) = tg\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \frac{3\cdot 4}{4} = tg\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3 = \sqrt{3} - 3 < 0.$

Como f(3) > 0 > f(4) e f é contínua, existe uma raiz de **f** em (3, 4). Sendo tal raiz única, ela é x_0, e assim $x_0 \in (3, 4)$.

(+) Sabe-se que cos 36º = $\frac{\sqrt{5}+1}{4} \Rightarrow \text{Cos } 72° = 2\text{Cos}^2 36° - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$



$a^2 + (\sqrt{5}-1)^2 = 4^2 \Rightarrow a^2 = 10 + 2\sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$

e assim $tg\ 72° = \frac{a}{\sqrt{5}-1} = \frac{10+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$

Resposta correta: (D)

13ª QUESTÃO

Seja uma elipse com focos no eixo OX e centrada na origem. Seus eixos medem 10 e 20/3. Considere uma hipérbole tal que os focos da elipse são os vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são os vértices da elipse. As parábolas que passam pelas interseções entre a elipse e a hipérbole e que são tangentes ao eixo OY, na origem, têm as seguintes equações:

(A) $y^2 = \pm 2\frac{\sqrt{35}}{7}x$

(B) $y^2 = \pm 4\frac{\sqrt{5}}{7}x$

(C) $y^2 = \pm 6\frac{\sqrt{5}}{7}x$

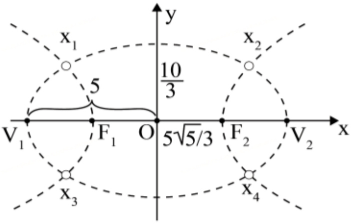
(D) $y^2 = \pm 6\frac{\sqrt{35}}{7}x$

(E) $y^2 = \pm 8\frac{\sqrt{35}}{63}x$

Comenta

GEOMETRIA ANALÍTICA

Como os focos estão na horizontal, temos que, para a elipse, o eixo maior é 2a = 10 e o eixo menor é $2b = \frac{20}{3}$, donde a = 5, $b = \frac{10}{3}$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.



Daí, os focos da elipse são:
$F_1 = \left(-\frac{5\sqrt{5}}{3}, 0\right); F_2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{3}, 0\right).$

E os vértices são:
$V_1 = (-5, 0); V_2 = (5, 0)$

Assim, nossa hipérbole, por ter focos V_1 e V_2 no eixo $\overrightarrow{OX}$, tem equação $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, donde $2\alpha = F_1F_2 = \frac{10\sqrt{5}}{3} \therefore \alpha = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ e $\beta = \sqrt{OV_2^2 - OF_2^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$, pois V_1 e V_2 são os focos da hipérbole.

Assim, a equação da elipse é $\frac{x^2}{25} + \frac{9y^2}{100} = 1$ e da hipérbole é $\frac{9x^2}{125} - \frac{9y^2}{100} = 1$. Para achar as coordenadas dos pontos de interseção $x_i = (x,y)$, basta resolvermos o sistema:

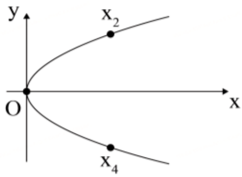
$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{9y^2}{100} = 1 & (1) \\ \frac{9x^2}{125} - \frac{9y^2}{100} = 1 & (2) \end{cases}$$

Somando (1) e (2):

$$\frac{14x^2}{125} = 2 \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{5\sqrt{35}}{7}}.$$

Substituindo em (1):

$$\frac{5}{7} + \frac{9y^2}{100} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{200}{63} \Rightarrow \boxed{y = \pm\frac{10\sqrt{14}}{21}}$$



A parábola tangente a $\overrightarrow{Oy}$ na origem e passando por x_2 e x_4 tem equação $y^2 = px$.

Mas $x_2 = \left(\frac{5\sqrt{35}}{7}, \frac{10\sqrt{14}}{21}\right)$, donde:

$p = \frac{\left(\frac{10\sqrt{14}}{21}\right)^2}{\frac{5\sqrt{35}}{7}} = \frac{200}{63} \cdot \frac{7}{5\sqrt{35}} = \frac{40}{9\sqrt{35}} = \frac{8\sqrt{35}}{63}$. Logo, tal parábola tem equação $y^2 = \frac{8\sqrt{35}}{63}x$.

Analogamente, para o outro lado, a parábola do outro lado tem equação $y^2 = -\frac{8\sqrt{35}}{63}x$.

Resposta correta: (E)

14ª QUESTÃO

Seja um heptágono regular de lado l cuja menor diagonal vale d. O valor da maior diagonal satisfaz a qual das expressões?

(A) $\frac{l.d}{d-l}$

(B) $\frac{d^2}{d-l}$

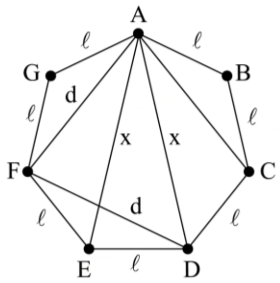
(C) $\frac{l.d}{d+l}$

(D) $\frac{l^2}{d+l}$

(E) $\frac{3.d}{2}$

Comenta

GEOMETRIA PLANA



Seja ABCDEFG o heptágono regular de lado ℓ, diagonal menor **d** e diagonal maior **x**. Assim, pelo Teorema de Ptolomeu no quadrilátero ADEF: $x \cdot \ell + d \cdot \ell = x \cdot d \Rightarrow d\ell = x(d-\ell)$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{d\ell}{d-\ell}}$$

Resposta correta: (A)

15ª QUESTÃO

Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de 28 cm². Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

(A) $\sqrt{17}$ cm

(B) $\sqrt{19}$ cm

(C) $\sqrt{21}$ cm

(D) $2\sqrt{7}$ cm

(E) $\sqrt{29}$ cm

Comenta

GEOMETRIA ESPACIAL, PGs

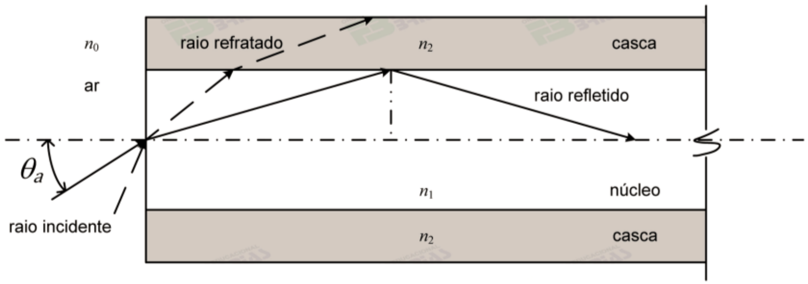
Sejam **a**, **b**, **c** os lados do prisma reto-retângulo. Como (**a**, **b**, **c**) formam uma PG de razão 2, então b = 2a, c = 4a.
Ademais, a área superficial é $2(ab + bc + ca) = 28 \Rightarrow 2(a \cdot 2a + 2a \cdot 4a + 4a \cdot a) = 28a^2 = 28 \Rightarrow \boxed{a = 1 \text{ cm}}$

Portanto, tal paralelepípedo tem lados 1, 2, 4 cm e, com isso, sua diagonal mede $\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$ cm

Resposta correta: (C)

FÍSICA

16ª QUESTÃO



As fibras ópticas funcionam pelo Princípio da Reflexão Total, que ocorre quando os raios de luz que seguem determinados percursos dentro da fibra são totalmente refletidos na interface núcleo-casca, permanecendo no interior do núcleo. Considerando apenas a incidência de raios meridionais e que os raios refratados para a casca são perdidos, e ainda, sabendo que os índices de refração do ar, do núcleo e da casca são dados, respectivamente, por n_0, n_1, e n_2 ($n_1 > n_2 > n_0$), o ângulo máximo de incidência θ_a, na interface ar-núcleo, para o qual ocorre a reflexão total no interior da fibra é:

Considerações:

- raios meridionais são aqueles que passam pelo centro do núcleo; e
- todas as opções abaixo correspondem a números reais.

(A) $\text{arc sen}\left(\frac{n_2{}^2 - n_0{}^2}{n_1}\right)$

(B) $\text{arc sen}\left(\frac{n_1{}^2 - n_2{}^2}{n_0}\right)$

(C) $\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{n_1{}^2 - n_2{}^2}}{n_0}\right)$

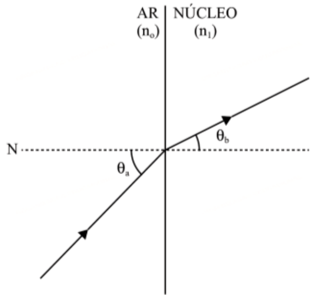
(D) $\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{n_2{}^2 - n_0{}^2}}{n_1}\right)$

(E) $\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{n_1{}^2 - n_2{}^2}}{n_0}\right)$

Comenta

ÓPTICA

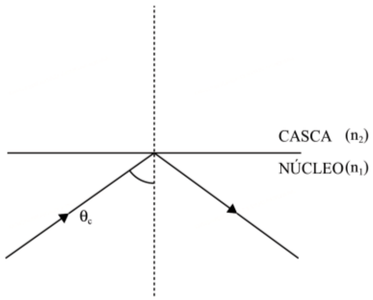
Analisando a 1ª refração (ar → núcleo)



$$n_o \cdot \text{sen } \theta a = n_1 \cdot \text{sen } \theta_b$$

$$\boxed{\text{sen } \theta_b = \frac{n_o}{n_1} \cdot \text{sen } \theta_a} \quad \text{(I)}$$

2ª refração (núcleo → casca)



Para haver reflexão total, deve-se ter:

$$\theta_c \geq \theta_{Lim} \text{ onde } \text{sen}\theta_{Lim} = \frac{n_2}{n_1}$$

Logo: $\text{sen } \theta_c \geq \frac{n_2}{n_1}$

$$\boxed{\cos \theta_c \leq \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}}} \quad \text{(II)}$$

Como $\theta_b + \theta_c = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\text{sen } \theta_b = \cos \theta_c}$ (III)

Aplicando (I) e (II) em (III), temos:

$$\frac{n_o}{\cancel{n_1}} \cdot \text{sen } \theta_a \leq \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{\cancel{n}_1}$$

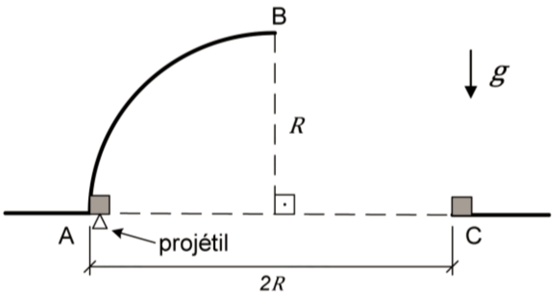
$$\text{sen } \theta_a \leq \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_o}$$

$$\theta_a \leq \text{arc sen}\left[\frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_o}\right]$$

$$\theta_{a_{\text{máx}}} = \text{arc sen}\left[\frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_o}\right]$$

Resposta correta: (C)

17ª QUESTÃO



Conforme a figura acima, um corpo, cuja velocidade é nula no ponto A da superfície circular de raio R, é atingido por um projétil, que se move verticalmente para cima, e fica alojado no corpo. Ambos passam a deslizar sem atrito na superfície circular, perdendo o contato com a superfície no ponto B. A seguir, passam a descrever uma trajetória no ar até atingirem o ponto C, indicado na figura. Diante do exposto, a velocidade do projétil é:

Dados:

- massa do projétil: m;
- massa do corpo: $9m$; e
- aceleração da gravidade: g.

(A) $10\sqrt{\frac{5Rg}{2}}$

(B) $10\sqrt{\frac{3Rg}{2}}$

(C) $10\sqrt{\frac{5Rg}{3}}$

(D) $10\sqrt{\frac{3Rg}{5}}$

(E) $10\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$

Comenta

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA/LANÇAMENTO OBLÍQUO/COLISÕES

Estudo da colisão

Antes: $\square$ $u = 0$ depois: $\boxed{\Delta}$ $\uparrow v'$

$\uparrow v$

Δ

$$m \cdot v + 9\, m \cdot \cancelto{0}{u} = 10\, mv'$$

$\boxed{v = 10v'}$ (1)

Conservação da energia (A → B)

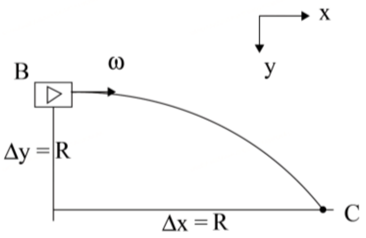
$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$\frac{\cancel{10m}\,(v')^2}{2} + \cancel{10m}\,g\,y_A = \frac{\cancel{10m}\,\omega^2}{2} + \cancel{10m}\,g\,y_B$$

$$(v')^2 = \omega^2 + 2g\underbrace{(y_B - y_A)}_{R}$$

$\boxed{(v')^2 = \omega^2 + 2gR}$ (2)

Lançamento:



$$\Delta x = \omega \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{R}{\omega}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$$

$$\cancel{R} = \frac{1}{2} g \cdot \frac{R^{\cancel{2}}}{\omega^2} \rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g \cdot R}{2}} \quad (3)$$

Aplicando (3) em (2):

$$(v')^2 = \frac{g \cdot R}{2} + 2gR$$

$$(v')^2 = \frac{5}{2}\, gR \rightarrow v' = \sqrt{\frac{5}{2}\, gR}$$

Aplicando em (1), temos:

$$\boxed{v = 10 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}\, gR}}$$

Obs.: A questão informa, em seu enunciado, que o conjunto (projétil + corpo) só perde contato com a pista no ponto B, entretanto, sabe-se que para isso ser possível a velocidade do conjunto no ponto B deve ser no mínimo $\sqrt{gR}$. Na solução, a velocidade calculada em B foi de $\sqrt{\frac{gR}{2}}$, sendo assim, o conjunto deveria perder o contato em algum ponto entre A e B, tornando a questão fisicamente incompatível.

Resposta correta: (A)

18ª QUESTÃO

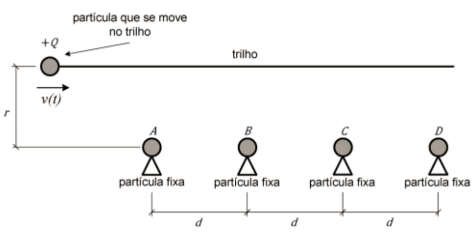


Figura 1

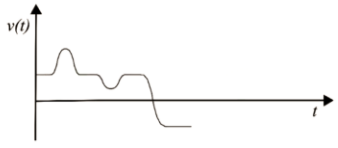


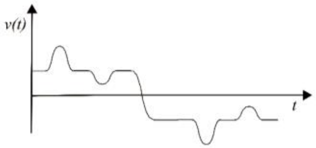
Figura 2

Como mostra a Figura 1, uma partícula de carga positiva se move em um trilho sem atrito e sofre a interação de forças elétricas provocadas por outras partículas carregadas fixadas nos pontos A, B, C e D. Sabendo que as cargas das partículas situadas em B e D são iguais e que uma parte do gráfico da velocidade da partícula sobre o trilho, em função do tempo, está esboçada na Figura 2, o gráfico completo que expressa a velocidade da partícula está esboçado na alternativa:

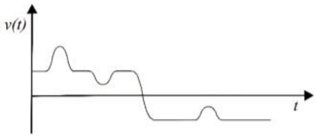
Observações:

- $r \ll d$;
- em $t = 0$, a partícula que se move no trilho está à esquerda da partícula situada no ponto A;
- considera-se positiva a velocidade da partícula quando ela se move no trilho da esquerda para a direita.

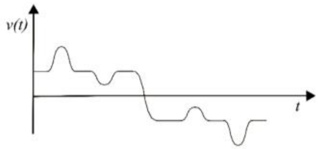
(A)



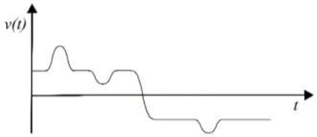
(B)



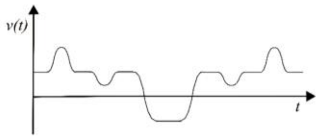
(D)



(C)



(E)



Comenta

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Como o sistema é conservativo, temos que:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + U_o = E_{mec}^{(inicial)} \longrightarrow \text{constante}$$

Assim:

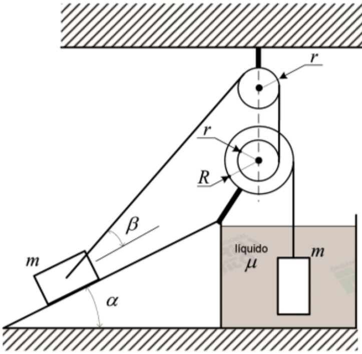
$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + U_{(x)} = E_{mec}^{(inicial)}$$

$$\upsilon = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_{mec}^{(inicial)} - U_{(x)}\right]}$$

Percebemos que, após a velocidade se tornar nula, o movimento é invertido. Logo, a partícula passará pelos mesmos potenciais e o gráfico sofrerá uma reflexão no eixo (t). Dessa forma, o gráfico que melhor representa tal situação é o traçado no item D.

Resposta correta: (D)

19ª QUESTÃO



Como mostra a figura, dois corpos de massa m e volume V estão em equilíbrio estático. Admita que μ é a massa específica do líquido, que não existe atrito entre o corpo e o plano inclinado e que as extremidades dos fios estão ligadas a polias, sendo que duas delas são solidárias, com raios menor e maior r e R, respectivamente. A razão R/r para que o sistema esteja em equilíbrio é:

(A) $\dfrac{m\,\text{sen}(\alpha+\beta)}{m-\mu V}$

(B) $\dfrac{m\cos(\alpha+\beta)}{m-\mu V}$

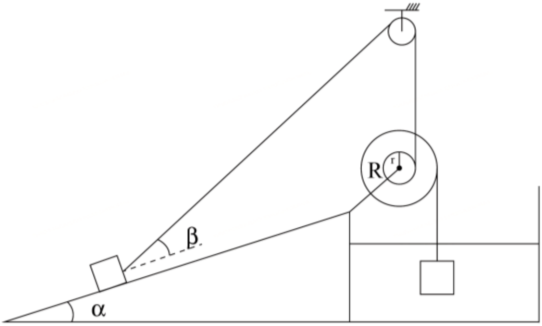
(C) $\dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\beta)}\left(1-\dfrac{\mu V}{m}\right)^{-1}$

(D) $\dfrac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\beta)}\left(1-\dfrac{\mu V}{m}\right)^{-1}$

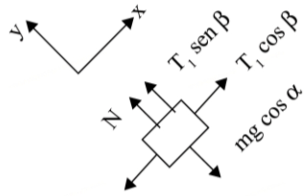
(E) $\cos(\alpha+\beta)\left(1-\dfrac{\mu V}{m}\right)$

Comenta

ESTÁTICA E HIDROSTÁTICA



Equilíbrio do bloco no plano inclinado.

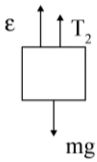


No eixo x

$T_1 \cos\beta = mg \operatorname{sen}\alpha$

$$T_1 = \frac{mg \operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta}$$

Equilíbrio do bloco submerso.

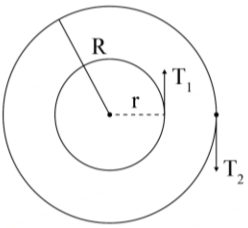


$E + T_2 = mg$

$\mu Vg + T_2 = mg$

$T_2 = mg - \mu Vg$

Equilíbrio na roldana.



$$T_2 \cdot R = T_1 \cdot r$$

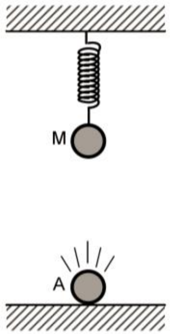
$$(mg - \mu Vg)\, R = mg \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta} \cdot r$$

$$\left(1 - \frac{\mu V}{m}\right) \cancel{mg} R = \cancel{mg} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta} r$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta}\left(1 - \frac{\mu V}{m}\right)^{-1}$$

Resposta correta: (C)

20ª QUESTÃO



Como mostra a figura acima, um microfone M está pendurado no teto, preso a uma mola ideal, verticalmente acima de um alto-falante A, que produz uma onda sonora cuja frequência é constante. O sistema está inicialmente em equilíbrio. Se o microfone for deslocado para baixo de uma distância d e depois liberado, a frequência captada pelo microfone ao passar pela segunda vez pelo ponto de equilíbrio será:

Dados:

- frequência da onda sonora produzida pelo alto-falante: f;
- constante elástica da mola: k;
- massa do microfone: m; e
- velocidade do som: v_S.

(A) $f\left[1-\frac{d}{v_S}\sqrt{\frac{2k}{m}}\right]$

(B) $f\left[1+\frac{d}{v_S}\sqrt{\frac{k}{m}}\right]$

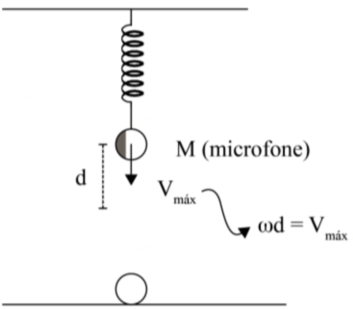
(C) $f\left[1-\frac{d}{v_S}\sqrt{\frac{k}{m}}\right]$

(D) $f\left[1+\frac{d}{v_S}\sqrt{\frac{2k}{m}}\right]$

(E) $f\left[1-\frac{d}{v_S}\sqrt{\frac{k}{2m}}\right]$

Comenta

MHS E EFEITO DOPPLER



Ao passar pela posição de equilíbrio, a velocidade é máxima. Logo, a frequência captada deve ser:

$$fap = f \cdot \left(\frac{V_{som} + V_{observador}}{V_{som} + \cancelto{0}{V_{fonte}}}\right)$$

$$fap = f \cdot \left(1 + \frac{V_{observador}}{V_{som}}\right)$$

$$\text{fap} = f \cdot \left(1 + \frac{Wd}{Vs}\right)$$

$$\text{fap} = f \cdot \left(1 + \frac{d}{Vs}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

Resposta correta: (B)

21ª QUESTÃO

Considere as afirmações abaixo, relativas a uma máquina térmica que executa um ciclo termodinâmico durante o qual há realização de trabalho.

Afirmação I. Se as temperaturas das fontes forem 27º C e 427º C, a máquina térmica poderá apresentar um rendimento de 40%.

Afirmação II. Se o rendimento da máquina for 40% do rendimento ideal para temperaturas das fontes iguais a 27º C e 327º C e se o calor rejeitado pela máquina for 0,8 kJ, o trabalho realizado será 1,8 kJ.

Afirmação III. Se a temperatura de uma das fontes for 727º C e se a razão entre o calor rejeitado pela máquina e o calor recebido for 0,4, a outra fonte apresentará uma temperatura de -23º C no caso de o rendimento da máquina ser 80% do rendimento ideal.

Está(ão) correta(s) a(s) seguinte(s) afirmação(ões):

(A) I, apenas.
(B) I e II, apenas.
(C) II e III, apenas.
(D) I e III, apenas.
(E) III, apenas.

Comenta

TERMODINÂMICA

I. $T_F = 27 + 273 = 300\text{ K}$
$T_Q = 427 + 273 = 700\text{ K}$

$$\eta_{máx} = 1 - \frac{T_F}{T_Q} = 1 - \frac{300K}{700K} \cong 0,57 = 57\%$$

Logo, a máquina pode apresentar um rendimento de 40% (afirmação correta)

II. $T_F = 27 + 273 = 300\text{ K}$
$T_Q = 327 + 273 = 600\text{ K}$

$$\eta_{máx} = 1 - \frac{T_F}{T_Q} = 1 - \frac{300\text{ K}}{600\text{ K}} = 0,5 = 50\%\text{ (ideal)}$$

$$\eta = 40\%\ \eta_{máx} = 0,40 \cdot 0,50 = 0,20 = 20\%$$

$$\text{Se}\,|Q_{CEDIDO}| = 0{,}8\text{ kJ} \rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_{CEDIDO}|}{|Q_{RECEBIDO}|} \rightarrow 0{,}2 = 1 - \frac{0{,}8\text{ kJ}}{|Q_{RECEBIDO}|} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{0{,}8\text{ kJ}}{|Q_{RECEBIDO}|} = 0{,}8 \rightarrow |Q_{RECEBIDO}| = 1\text{ kJ}$$

$$\text{Logo: } |\tau| = |Q_{RECEBIDO}| - |Q_{CEDIDO}| = 1\text{kJ} - 0{,}8\text{kJ}$$

$$|\tau| = 0{,}2\text{kJ (afirmação incorreta)}$$

III. $T_Q = 727 + 273 = 1000\text{ K}$

$$\frac{|Q_{CEDIDO}|}{|Q_{RECEBIDO}|} = 0{,}4 \rightarrow \eta = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

$$\text{Se } \eta = 80\%\ \eta_{máx} \rightarrow 0{,}6 = 0{,}8 \cdot \eta_{máx} \rightarrow \eta_{máx} = 0{,}75 = 75\%$$

$$1 - \frac{T_F}{T_Q} = 0{,}75$$

$$\frac{T_F}{1000\text{K}} = 0{,}25 \therefore T_F = 250\text{K} = -23°\text{C (afirmação correta)}$$

Resposta correta: (D)

22ª QUESTÃO

Considere uma corda pendurada no teto de uma sala. O intervalo de tempo para um pulso ondulatório percorrer toda a corda é dado por:

Dados:

- comprimento da corda: L;
- densidade linear da corda: μ; e
- aceleração da gravidade: g.

(A) $\sqrt{\frac{L}{2g}}$

(B) $2\sqrt{\frac{2L}{g}}$

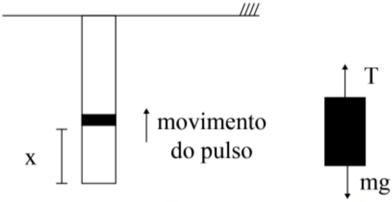
(C) $\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

(D) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}$

(E) $2\sqrt{\frac{L}{g}}$

Comenta

ONDAS / CINEMÁTICA



$T = mg;\ m = \mu x \Rightarrow T = \mu g\ x$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow v^2 = \frac{\cancel{\mu}\, g\, x}{\cancel{\mu}} \Rightarrow \boxed{v^2 = g\ x}$$

$$v^2 = v_o^{\,2} + 2a\ x \Rightarrow v_o = 0;\ a = \frac{g}{2}$$

$$\Delta S = v_o \Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} \Rightarrow L = 0 \cdot \Delta t + \frac{g\,\Delta t^2}{4}$$

$$\Delta t^2 = \frac{4L}{g} \Rightarrow \Delta t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Resposta correta: (E)

23ª QUESTÃO

Um veículo de combate tem, como armamento principal, um canhão automático eletromagnético, o qual está municiado com 50 projéteis. Esse veículo se desloca em linha reta, inicialmente, em velocidade constante sobre um plano horizontal. Como o veículo está sem freio e descontrolado, um engenheiro sugeriu executar disparos a fim de reduzir a velocidade do veículo. Após realizar 10 disparos na mesma direção e no mesmo sentido da velocidade inicial do veículo, este passou a se deslocar com metade da velocidade inicial. Diante do exposto, a massa do veículo, em kg, é:

Dados:

- velocidade inicial do veículo: 20 m/s;
- velocidade do projétil ao sair do canhão: 800 m/s; e
- massa do projétil: 2 kg.

Observação:

- não há atrito entre o plano horizontal e o veículo.

(A) 1.420

(B) 1.480

(C) 1.500

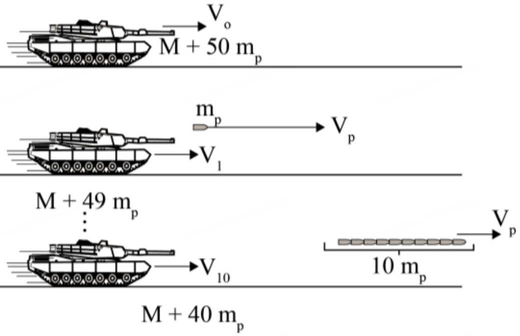
(D) 1.580

(E) 1.680

Comenta

MECÂNICA: QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$v_0 = 20$ m/s
$v_p = 800$ m/s (considerado em relação à Terra)
$m_p = 2$ kg



Conservando a quantidade de movimento

$$(M + 50\ m_p) \cdot v_0 = (M + 40\ m_p) \cdot v_{10} + 10m_p \cdot v_p$$

mas, foi dado que $v_{10} = \dfrac{v_0}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$ m/s, logo:

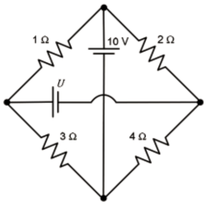
$$(M + 50 \cdot 2) \cdot 20 = (M + 40 \cdot 2) \cdot 10 + 10 \cdot 2 \cdot 800$$

$$\vdots$$

$$M = 1480 \text{ kg}$$

Resposta correta: (B)

24ª QUESTÃO



A figura acima mostra um circuito formado por quatro resistores e duas baterias. Sabendo que a diferença de potencial entre os terminais do resistor de 1 Ω é zero, o valor da tensão U, em volts, é:

(A) $^{154}/_{15}$

(B) $^{30}/_{4}$

(C) $^{70}/_{9}$

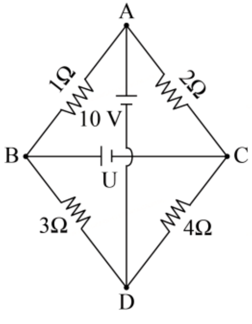
(D) 10

(E) $^{154}/_{30}$

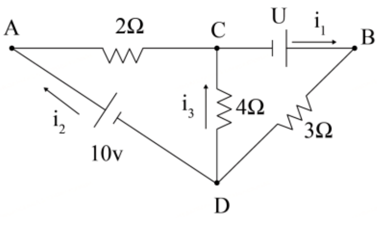
Comenta

CIRCUITOS

Figura:



- Aplicando Thévenin entre A e B, temos:



- Adotando o sentido das correntes indicado na figura.

Aplicando Kirchhoff na malha:

*** ACDA**

$10 - 2i_2 + 4i_3 = 0 \rightarrow i_2 - 2i_3 = 5$

*** ACBDA**

$10 - 2i_2 + U - 3i_1 = 0 \rightarrow 2i_2 + 3i_1 = 10 + U$

Para o nó C, temos:

$i_2 + i_3 = i_1$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} i_2 + i_3 = i_1 \rightarrow i_3 = i_1 - i_2 \\ i_2 - 2i_3 = 5 \\ 2i_2 + 3i_1 = 10 + U \end{cases}$$

Substituindo i_3, temos:

$$\begin{cases} i_2 - 2(i_1 - i_2) = 5 \\ 2i_2 + 3i_1 = 10 + U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2i_1 + 3i_2 = 5 & (1) \\ 3i_1 + 2i_2 = 10 + U & (2) \end{cases}$$

Somando 3 · (1) e 2 · (2), temos:

$9i_2 + 4i_2 = 15 + 20 + 2U$

$13i_2 = 35 + 2U$

$$\boxed{i_2 = \frac{35 + 2U}{13}} \rightarrow i_1 = 5 + 2\left(\frac{35 + 2U}{13}\right)$$

$$i_1 = \frac{65 + 70 + 4U}{13}$$

$$\boxed{i_1 = \frac{135 + 4U}{13}}$$

A d.d.p. de A para B:

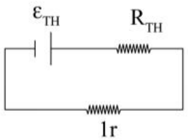
$V_A - 2i_2 - U = V_B \rightarrow V_A - V_B = U - 2i_2$

$$V_A - V_B = U - 2\left(\frac{35 + 2U}{13}\right)$$

$$V_A - V_B = U - \left(\frac{70 + 4U}{13}\right) \rightarrow V_A - V_B = \frac{13U - 70 - 4U}{13}$$

$$V_A - V_B = \frac{9U - 70}{13}$$

Sabemos que $V_A - V_B = \varepsilon_{TH}$. O circuito se resume a:

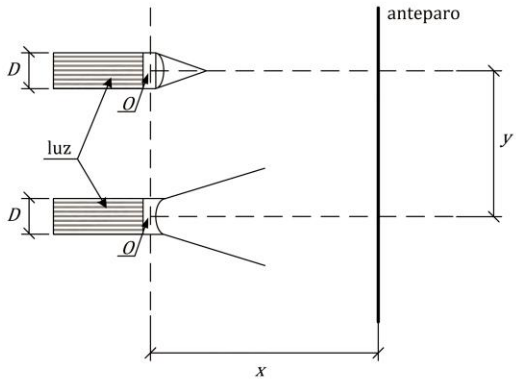


$\rightarrow$ Para a d.d.p. entre o resistor de 1Ω ser zero, o $\varepsilon_{TH} = 0$.

$$\varepsilon_{TH} = 0 \rightarrow \frac{9U - 70}{13} = 0 \rightarrow \boxed{U = \frac{70}{9}V}$$

Resposta correta: (C)

25ª QUESTÃO

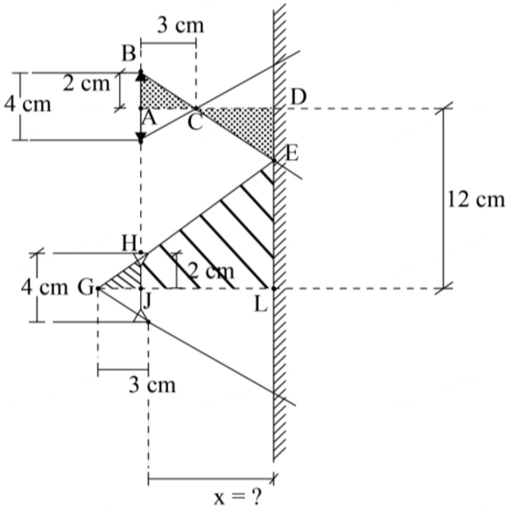


Conforme a figura acima, duas lanternas muito potentes, cilíndricas, com diâmetro $D = 4$ cm, estão alinhadas no plano vertical. Ambas possuem lentes nas extremidades, cujos centros ópticos O estão alinhados verticalmente e cujas distâncias focais são $f = 3$ cm. Uma das lentes é convergente e a outra é divergente. Suas lâmpadas geram raios de luz horizontais, que encontram as lentes das respectivas lanternas e são projetados até um anteparo vertical. Sabendo que a distância entre os centros ópticos das duas lentes é $y = 12$ cm, a distância máxima x entre os centros ópticos das lentes O e o anteparo, em centímetros, que faz com que a luz projetada pelas lanternas não se sobreponha é:

(A) 6
(B) 9
(C) 12
(D) 15
(E) 18

Comenta

ÓPTICA GEOMÉTRICA



$\Delta ABC \sim \Delta DEC$

$$\frac{2}{3} = \frac{DE}{x-3} \therefore DE = \frac{2}{3}(x-3)$$

$\Delta GHJ \sim \Delta GEL$

$$\frac{2}{3} = \frac{EL}{x+3} \therefore EL = \frac{2}{3}(x+3)$$

Note-se que DE + EL = 12 cm.

Logo: $\frac{2}{3}(x-3)+\frac{2}{3}(x+3)=12$ cm

$x - 3 + x + 3 = 18$ cm
$x = 9$ cm

Resposta correta: (B)

26ª QUESTÃO

Duas partículas A e B, carregadas eletricamente com mesmos valores de cargas positivas, partem da origem em velocidade nula no instante $t = 0$, e têm suas componentes de aceleração em relação aos eixos X e Y regidas pelas seguintes equações temporais:

Partícula A: $\begin{cases} a_x(t) = \cos(t) \\ a_y(t) = \text{sen}(t) \end{cases}$

Partícula B: $\begin{cases} a_x(t) = -\cos(t) \\ a_y(t) = \text{sen}(t) - \cos(t) \end{cases}$

O instante $t_{\min}$, onde $0 \leq t_{\min} < 2\pi$, em que a força de repulsão entre as cargas é mínima é

(A) $\frac{3}{2}\pi$

(B) $\frac{1}{4}\pi$

(C) $\frac{1}{2}\pi$

(D) $\frac{3}{4}\pi$

(E) π

Comenta

CINEMÁTICA

A força de repulsão entre as cargas será mínima quando a distância entre elas for máxima, logo, vamos obter. A função horária da posição das partículas:

Partícula A:
(eixo x)

$$a_x = \cos t$$
$$\frac{dv_x}{dt} = \cos t$$
$$dv_x = \cos t\, dt$$
$$v_x = \int \cos t\, dt$$
$$v_x = \sin t + C_1$$
$$\text{em } t = 0 \rightarrow v_x = 0 \rightarrow C_1 = 0$$
$$\boxed{v_x = \sin t}$$

$$v_x = \text{sen}\, t$$
$$\frac{dx}{dt} = \text{sen}\, t$$
$$dx = \text{sen}\, t\, dt$$
$$x = \int \text{sen}\, t\, dt$$
$$x = -\cos t + C_2$$
$$\text{em } t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow C_2 = +1$$
$$\boxed{x = 1 - \cos t}$$

(eixo y)

$$a_y = \text{sen } t$$
$$\frac{dv_y}{dt} = \text{sen } t$$

$$\text{em } t = 0,\ y = 0 \rightarrow C_4 = 0$$
$$\boxed{y = t - \text{sen } t}$$

$dv_y = \text{sen } t\, dt$

$v_y = \int \text{sen } t\, dt$

$v_y = -\cos t + C_3$

em $t = 0 \rightarrow v_y = 0 \rightarrow C_3 = +1$

$\boxed{v_y = 1 - \cos t}$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \cos t$$

$dy = (1 - \cos t)\, dt$

$y = \int dt - \int \cos t\, dt$

$y = t - \text{sen } t + C_4$

Assim, para a partícula A, sua posição é dada por $\vec{r}_A(t)$:

$\vec{r}_A(t) = x_A(t)\,\hat{i} + y_A(t)\,\hat{j}$

onde

$$\begin{cases} x_A(t) = 1 - \cos t \\ y_A(t) = t - \text{sen } t \end{cases}$$

Partícula B:

(eixo x)

$a_x = -\cos t$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\cos t$$

$dv_x = -\cos t \cdot dt$

$v_x = -\int \cos t\, dt$

$v_x = -\text{sen } t + C_5$

em $t = 0 \rightarrow v_x = 0 \rightarrow C_5$

$\boxed{V_x = -\text{sen } t}$

$$\frac{dx}{dt} = -\text{sen } t$$

$dx = -\text{sen } t\, dt$

$x = -\int \text{sen } t\, dt$

$x = \cos t + C_6$

em $t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow C_6 = -1$

$\boxed{x = \cos t - 1}$

(eixo y)

$a_y = \text{sen } t - \cos t$

$$\frac{dv_y}{dt} = \text{sen } t - \cos t$$

$dv_y = (\text{sen } t - \cos t)\,dt$

$v_y = \int \text{sen } t\, dt - \int \cos t\, dt$

$v_y = -\cos t - \text{sen } t + C_7$

em $t = 0 \rightarrow V_y = 0 \rightarrow C_7 = +1$

$\boxed{v_y = 1 - \cos t - \text{sen } t}$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \cos t - \text{sen } t$$

$dy = (1 - \cos t - \text{sen } t)dt$

$y = \int dt - \int \cos dt - \int \text{sen } dt$

$y = t - \text{sen } t + \cos t + c_8$

em $t = 0$, $y = 0 \rightarrow c_8 = -1$

$\boxed{y = -1 + t - \text{sen } t + \cos t}$

Assim, para a partícula B, sua posição é dada por $\vec{r}_B(t)$:

$$\vec{r}_B(t) = x_B(t)\hat{i} + y_B(t)\hat{j}$$

onde: $\begin{cases} x_B(t) = \cos t - 1 \\ y_B(t) = -1 + t - \text{sen } t + \cos t \end{cases}$

A distância entre as partículas será dada por $\left|\vec{r}_{A,B}\right|$, onde $\vec{r}_{A,B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$, assim:

$x_{A,B} = x_A - x_B = (1 - \cos t) - (\cos t - 1) = 2(1 - \cos t)$

$y_{A,B} = y_A - y_B = (t - \text{sen } t) - (-1 + t - \text{sen } t + \cos t)$

$y_A - y_B = 1 - \cos t$

$$\vec{r}_{A,B} = x_{A,B}\hat{i} + y_{A,B}\hat{j}$$

$$\vec{r}_{A,B} = 2(1 - \cos t)\hat{i} + 2(1 - \cos t)\hat{j}$$

$$\left|\vec{r}_{A,B}\right| = \sqrt{[2(1-\cos t)]^2 + (1-\cos t)^2}$$

$$\left|\vec{r}_{A,B}\right| = \left|\sqrt{5}\cdot(1-\cos t)\right|$$

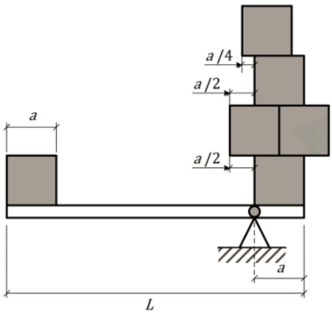
para $\left|\vec{r}_{A,B}\right|$ assumir um valor máximo, $\cos t = -1$, logo $t = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ $\boxed{t_{mín} = \pi}$,

pois $\boxed{0 < t_{mín} < 2\pi}$

Obs.: Nessa questão, nota-se que é impossível as partículas possuírem as acelerações descritas no enunciado se as forças que atuam nelas forem apenas as forças de interação elétricas entre elas, assim, exige-se que atue forças externas para que a situação física descrita seja possível.

Resposta correta: (E)

27ª QUESTÃO



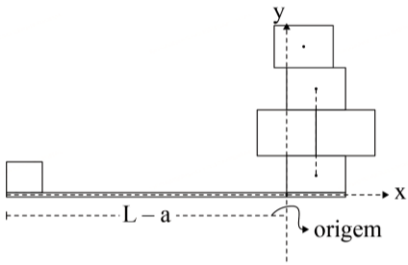
O sistema mostrado na figura acima encontra-se em equilíbrio estático, sendo composto por seis cubos idênticos, cada um com massa específica μ uniformemente distribuída e de aresta a, apoiados em uma alavanca composta por uma barra rígida de massa desprezível. O comprimento L da barra para que o sistema esteja em equilíbrio é:

(A) $\frac{9}{4}a$
(B) $\frac{13}{4}a$
(C) $\frac{7}{2}a$
(D) $\frac{15}{4}a$
(E) $\frac{17}{4}a$

Comenta

ESTÁTICA

Para que o sistema esteja em equilíbrio, o centro de massa deve se encontrar no pivô. Assim:



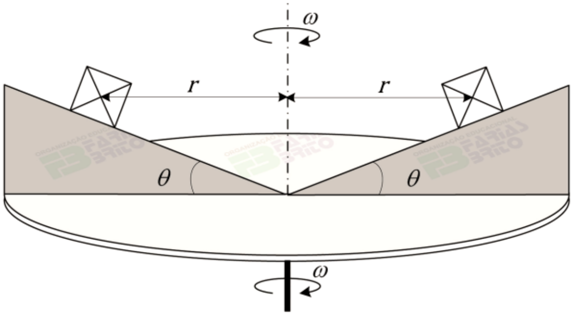
$$\overset{0}{\cancel{x_{cm}}} = \frac{-\cancel{M}\cdot\left(L-a-\frac{a}{2}\right)+4\cancel{M}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)+\cancel{M}\cdot\left(\frac{a}{4}\right)}{6\cancel{M}}$$

$$\text{Logo}: -L+\frac{3a}{2}+2a+\frac{a}{4}=0$$

$$L=\frac{6a+8a+1}{4}=\frac{15}{4}a.$$

Resposta correta: (D)

28ª QUESTÃO



O sistema mostrado na figura gira em torno de um eixo central em velocidade angular constante ω. Dois cubos idênticos, de massa uniformemente distribuída, estão dispostos simetricamente a uma distância r do centro ao eixo, apoiados em superfícies inclinadas de ângulo θ. Admitindo que não existe movimento relativo dos cubos em relação às superfícies, a menor velocidade angular ω para que o sistema se mantenha nessas condições é:

<u>Dados</u>:

- aceleração da gravidade: g;
- massa de cada cubo: m;
- aresta de cada cubo: a; e
- coeficiente de atrito entre os cubos e as superfícies inclinadas: μ.

(A) $\left[\frac{g}{r}\left(\frac{\mu.\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)+\mu.\cos(\theta)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

(B) $\left[\frac{g}{r}\left(\frac{\mu.\cos(\theta)}{\cos(\theta)+\mu.\text{sen}(\theta)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

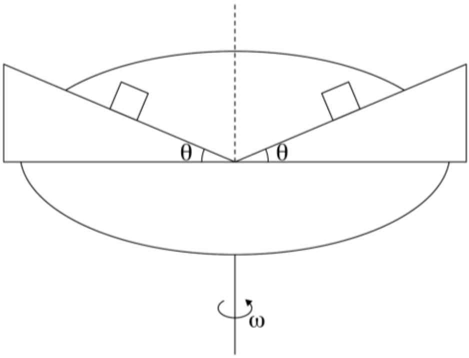
(C) $\left[\frac{g}{r}\left(\frac{\mu.\text{sen}(\theta)+\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)+\mu.\cos(\theta)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

(D) $\left[\frac{g}{r}\left(\frac{\text{sen}(\theta)-\mu.\cos(\theta)}{\cos(\theta)+\mu.\text{sen}(\theta)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

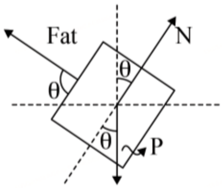
(E) $\left[\frac{g}{r}\left(\frac{\text{sen}(\theta)-\mu.\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)+\mu.\cos(\theta)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

Comenta

DINÂMICA ROTACIONAL



Para um ω mínimo, temos que a tendência do corpo é deslizar para o centro do disco. Logo, podemos desenhar as forças em um dos blocos.



No eixo **y**, temos:

$N\cos\theta + Fat\ \text{sen}\theta = P$

$N\cos\theta + \mu\ N\text{sen}\theta = mg$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta + \mu\,\text{sen}\,\theta} \qquad (1)$$

No eixo **x**, temos:

$F_{rc} = N\text{sen}\theta - Fat\ \cos\theta$

$m\omega^2R = N\text{sen}\theta - \mu N\cos\theta$

$m\omega^2R = N(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta\ )$. Substituindo "N".

$$\cancel{m}\omega^2R = \frac{\cancel{m}g(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\,\text{sen}\,\theta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\,\text{sen}\,\theta}}$$

Resposta correta: (D)

29ª QUESTÃO

Uma partícula elétrica de carga unitária, dotada de massa e inicialmente parada, sofre a ação de um impulso, entrando imediatamente em uma região do espaço na qual o campo magnético é uniforme, passando a realizar um movimento no sistema de coordenadas XYZ, descrito pelas seguintes funções do tempo t:

$$\begin{cases} x(t) = 3\,\text{sen}(2t) \\ y(t) = 8\,t \\ z(t) = 3\cos(2t) \end{cases}$$

Considerando todas as grandezas no Sistema Internacional de Unidades, o módulo do campo magnético é:

Dado:

- impulso: 10.

Observação:

- despreze a força gravitacional.

(A) 1,00
(B) 1,50
(C) 2,00
(D) 3,00
(E) 4,00

Comenta

FORÇA MAGNÉTICA

$$\begin{cases} x(t) = 3\,\text{sen}(2t) \therefore v_x(t) = 6\text{ m/s}\cos(2t) \\ y(t) = 8t \therefore v_y = 8\text{ m/s} \\ z(t) = 3\cos(2t) \therefore v_z(t) = 6\text{ m/s sen}(2t) \end{cases}$$

$q = 1\text{ C}$

$|\bar{I}| = 10\text{ N} \cdot \text{s} \rightarrow$ módulo do impulso.

Quando a partícula entra no campo magnético, a trajetória seguida passa a ser uma hélice cilíndrica. Note que o raio é dado por:

$x^2 + z^2 = 9 \therefore \boxed{r = 3\text{ m}}$

No referencial que se move com o centro, temos que:

$$q\cancel{v}B = \frac{mv^{\cancel{2}}_{\text{rotação}}}{r}$$

A componente da velocidade de rotação é 6 m/s e de translação é 8 m/s. A resultante é 10 m/s. Como o impulso resultante é 10 N · s, temos:
$I = m \cdot v \rightarrow 10 = m \cdot 10 \rightarrow m = 1$ kg

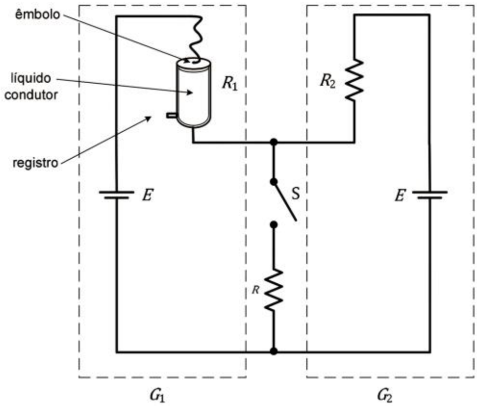
Daí: $qB = \frac{mv_{\text{rotação}}}{r}$

$$1 \cdot B = \frac{1 \cdot 6}{3}$$

$$\boxed{B = 2\ T}$$

Resposta correta: (C)

30ª QUESTÃO



A figura acima mostra dois geradores de corrente contínua, denominados G_1 e G_2, que possuem resistências internas R_1 e R_2 e a mesma tensão induzida E. Os geradores estão conectados a uma resistência R por meio de uma chave S. A resistência R_1 é um cilindro não condutor que possui um êmbolo condutor em sua parte superior e que se encontra, inicialmente, totalmente preenchido por um liquido condutor. O êmbolo desce junto com o nível do líquido condutor no interior do cilindro, mantendo a continuidade do circuito. No instante em que a chave S é fechada, o líquido começa a escoar pelo registro cuja vazão volumétrica é Q. Diante do exposto, o instante de tempo t, no qual o gerador G_1 fornece 40% da corrente demandada pela carga é:

Dados:

- antes do fechamento da chave S: $R_1 = 4R_2$;
- resistividade do líquido condutor: ρ; e
- área da base do cilindro: A.

(A) $0{,}5\,\frac{A^2R_2}{\rho Q}$

(B) $1{,}0\,\frac{A^2R_2}{\rho Q}$

(C) $1{,}5\,\frac{A^2R_2}{\rho Q}$

(D) $2{,}0\,\frac{A^2R_2}{\rho Q}$

(E) $2{,}5\,\frac{A^2R_2}{\rho Q}$

Comenta

CIRCUITOS ELÉTRICOS

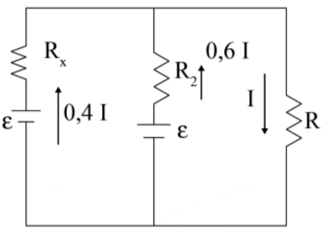
I) Temos que $R_1 = 4R_2$ quando a chave está aberta. Assim sendo, o recipiente está cheio, com volume $V_0 = AL \rightarrow L = \frac{V_0}{A}$.

II) $R_1 = \rho\frac{L}{A} \rightarrow R_1 = \frac{\rho V_0}{A^2} = 4R_2$.

Daí: $V_0 = \frac{4R_2A^2}{\rho}$.

III) Fechando a chave S, escoará líquido pelo registro, daí a nova resistência R_1 será $R_x = \frac{\rho\ell}{A} \rightarrow V_f = \ell A \rightarrow R_x = \frac{\rho V_f}{A^2} \rightarrow R_x = \frac{\rho(V_0 - Qt)}{A^2}$.

IV)



Daí: $\cancel{\varepsilon} - R_x 0{,}4\cancel{I} = \cancel{\varepsilon} - R_2 0{,}6\cancel{I} \Rightarrow R_x = \frac{3}{2}R_2$.

$$\frac{\rho}{A^2}(V_0 - Qt) = \frac{3}{2}R_2$$

$$V_0 - Qt = \frac{3}{2}\frac{R_2A^2}{\rho}$$

$$\frac{4R_2A^2}{\rho} - Qt = \frac{3}{2}\frac{R_2A^2}{\rho} \Rightarrow Qt = 2{,}5\frac{R_2A^2}{\rho} \Rightarrow t = 2{,}5\frac{R_2A^2}{\rho Q}$$

Resposta correta: (E)

QUÍMICA

31ª QUESTÃO

Admitindo que a solubilidade da azida de chumbo $Pb(N_3)_2$ em água seja 29,1 g/L, pode-se dizer que o produto de solubilidade (Kps) para esse composto é: (Dados: N = 14 g/mol, Pb = 207 g/mol)

(A) $4{,}0.10^{-3}$
(B) $1{,}0.10^{-4}$
(C) $2{,}0.10^{-4}$
(D) $1{,}0.10^{-3}$
(E) $3{,}0.10^{-4}$

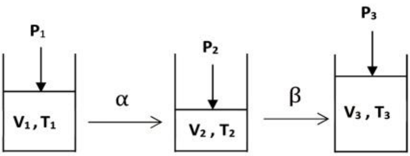
Comenta

PRODUTO DE SOLUBILIDADE

O equilíbrio de solubilidade é: $Pb(N_3)_{2(s)} \rightleftharpoons Pb^{2+}_{(aq)} + 2\,N_3^-{}_{(aq)}$. Como a solubilidade é 29,1 g/L

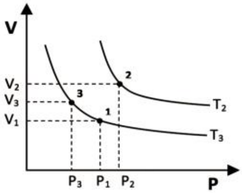
32ª QUESTÃO

Um sistema fechado contendo um gás ideal no estado 1 sofre as transformações ***α*** e ***β***, conforme indicado na figura abaixo.

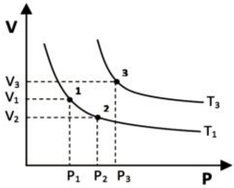


Sabendo que a transformação ***α*** é isotérmica e ***β*** isobárica, indique o gráfico que representa os estados do sistema.

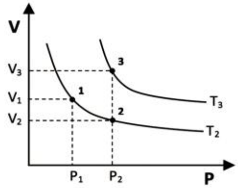
(A)



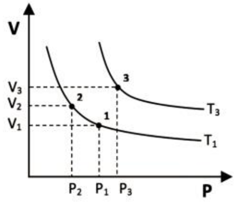
(B)



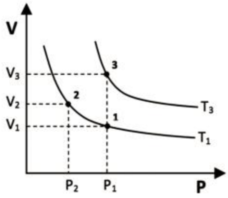
(C)



(D)



(E)



Comenta

TERMODINÂMICA

O gráfico que representa uma compessão isotérmica (α) seguida por uma expansão isobárica (β) é o do item C.

Resposta correta: (C)

33ª QUESTÃO

Considere que a reação abaixo ocorra em uma pilha.

$$2\ Fe^{+++} + Cu \rightarrow Cu^{++} + 2\ Fe^{++}$$

Assinale a alternativa que indica o valor correto do potencial padrão dessa pilha.

Dados: $Fe^{++} \rightarrow Fe^{+++} + e^-$ $E^0 = -0{,}77\ V$

$Cu^{++} + 2e^- \rightarrow Cu$ $E^0 = +0{,}34\ V$

(A) +1,20 V
(B) –0,43 V
(C) +1,88 V
(D) –1,20 V
(E) +0,43 V

Comenta

ELETROQUÍMICA

Para a pilha dada, temos:

Semirreação de redução (cátodo): $2\ Fe^{3+} + 2e^- \rightarrow 2\ Fe^{2+}$ $E^0 = +0{,}77\ V$
Semirreação de oxidação (ânodo): $Cu \rightarrow Cu^{2+} + 2e^-$ $E^0 = +0{,}34\ V$

Equação global: $2\ Fe^{3+} + Cu \rightarrow 2\ Fe^{2+} + Cu^{2+}$ $\Delta E^0 = ?$

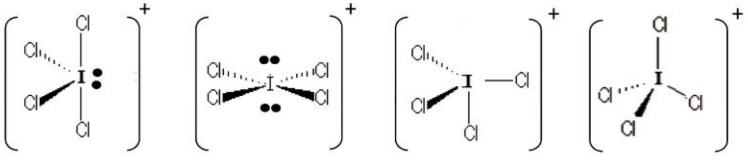
$\Delta E^0 = E^0_{cátodo} - E^0_{ânodo}$, em que E^0 representa o potencial padrão de redução. Assim:

$\Delta E^0 = (0{,}77 - 0{,}34)\ V \Rightarrow \boxed{\Delta E^0 = +0{,}43\ V}$

Resposta correta: (E)

34ª QUESTÃO

Assinale a alternativa que apresenta, respectivamente, a estrutura do íon **ICl_4^+** e o tipo de hibridização de seu átomo central.



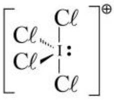
I II III IV

(A) III, sp^3
(B) I, sp^3d
(C) II, sp^3d^2
(D) IV, sp^3
(E) III, sp^3d

Comenta

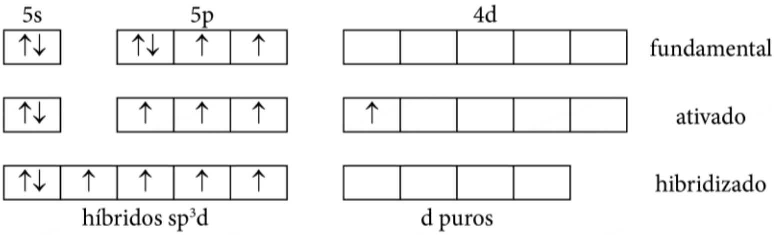
GEOMETRIA MOLECULAR

Considerando como átomo central o I^+, o número de pares eletrônicos que definem a geometria é igual a cinco, consistindo de quatro pares ligantes σ e um par não ligante. Assim, a espécie $IC\ell_4^+$ possui um arranjo eletrônico bipiramidal trigonal e uma geometria molecular do tipo gangorra (tetraedro distorcido).



A estrutura do átomo central é, então, condizente com uma hibridação sp^3d. Essa hibridação pode ainda ser confirmada pela configuração do I^+, descrita a seguir:

I^+: $[Kr]4d^{10}5s^25p^4$



Resposta correta: (B)

35ª QUESTÃO

Assinale a alternativa correta.

(A) Os glicídios são ésteres de ácidos graxos.

(B) Existem três tipos de DNA: o mensageiro, o ribossômico e o transportador.

(C) Alanina, valina, cisteína, citosina e guanina são exemplos de aminoácidos.

(D) As reações de hidrólise alcalina dos triacilgliceróis são também denominadas reações de saponificação.

(E) As proteínas são sempre encontradas em uma estrutura de dupla hélice, ligadas entre si por intermédio de ligações peptídicas.

Comenta

BIOQUÍMICA

A) **Falso**: Os glicídios são carboidratos que podem ser encontrados na forma de monossacarídeos (ex. glicose, frutose, galactose), dissacarídeos (ex. sacarose, maltose, lactose) e também polissacarídeos (ex. glicogênio, amido, celulose etc).

B) **Falso**: O DNA apresenta diferentes conformações. As formações denominadas como A-DNA, B-DNA e Z-DNA são encontradas em sistemas biológicos naturais.

C) **Falso**: Alanina, valina e cisteína são aminoácidos, enquanto citosina e guanina são bases nitrogenadas.

D) **Verdadeiro**: A hidrólise em meio básico de óleos ou gorduras (triacilgliceróis ou triglicerídeos) resulta na formação de glicerina (glicerol) e sais de ácidos graxos (sabão), em uma reação conhecida como saponificação.

E) **Falso**: As proteínas são macromoléculas orgânicas formadas pela união de vários aminoácidos, unidos por ligações peptídicas. A sequência dos aminoácidos em uma proteína representa a estrutura primária. Uma proteína não apresenta necessariamente aspecto helicoidal.

Resposta correta: (D)

36ª QUESTÃO

Dadas as seguintes equações que representam supostas reações químicas irreversíveis em meio aquoso e temperaturas moderadas:

I) $6\ HBr + 2\ Al \rightarrow 2\ AlBr_3 + 3\ H_2$

II) $H_2SO_4 + BaCl_2 \rightarrow BaSO_4 + 2\ HCl$

III) $2\ KOH + NiSO_4 \rightarrow Ni(OH)_2 + K_2SO_4$

IV) $2\ HBr + K_2S \rightarrow 2\ KBr + H_2S$

V) $BaCl_2 + Na_2CO_3 \rightarrow BaCO_3 + 2\ NaCl$

Pode-se afirmar que a reação:

(A) I não ocorre porque o Al é menos nobre que o hidrogênio, não tendo capacidade de provocar o seu deslocamento.

(B) II ocorre porque ácidos fortes reagem com sais formando um sal solúvel e outro ácido forte.

(C) III não ocorre porque uma base não reage com um sal para a formação de outra base e outro sal.

(D) IV ocorre porque ácidos fortes reagem com sais de ácidos fracos formando ácidos fracos e sais de ácidos fortes.

(E) V não ocorre porque o $BaCO_3$, à exceção da maioria dos carbonatos, é solúvel.

Comenta

REAÇÕES INORGÂNICAS

A) **Incorreta:** A reação I ocorre porque o alumínio é mais reativo que o hidrogênio, podendo deslocá-lo de um ácido.

B) **Incorreta:** A reação II ocorre porque se trata de uma dupla troca com formação de um precipitado, já que o sulfato de bário ($BaSO_4$) possui baixíssima solubilidade em água.

C) **Incorreta:** A reação III ocorre porque se trata de uma dupla troca com formação de um precipitado, uma vez que o hidróxido de níquel(II), $Ni(OH)_2$, possui baixíssima solubilidade em água.

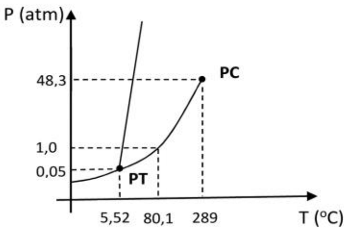
D) **Correta:** A reação IV ocorre porque se trata de uma dupla troca com formação de um ácido fraco gasoso, que é o sulfeto de hidrogênio (H_2S).

E) **Incorreta:** A reação V ocorre porque se trata de uma dupla troca com formação de um precipitado, pois o carbonato de bário possui baixíssima solubilidade em água.

Resposta correta: (D)

37ª QUESTÃO

Considere o diagrama de fases simples para o benzeno, em que PC é o ponto crítico e PT o ponto triplo.



Os pontos de fusão e de ebulição do benzeno a 1,0 atm são iguais a 5,53 °C e 80,1 °C, respectivamente. Considere ainda, o ponto P (5,50 °C, 55 atm) como ponto de partida das transformações sequenciais discriminadas abaixo:

(1) Inicialmente, elevação da temperatura até 300 °C, em um processo isobárico;
(2) Redução da pressão até 38 atm, em um processo isotérmico;
(3) Redução da temperatura até 5,50 °C, em um processo isobárico;
(4) Finalmente, redução da pressão até 0,02 atm, em um processo isotérmico.

Assinale a alternativa que apresenta a ordem correta das mudanças de fase observadas ao longo do processo descrito.

(A) Fusão, condensação, ebulição e evaporação.
(B) Fusão, condensação, solidificação e sublimação.
(C) Vaporização, condensação, fusão e sublimação.
(D) Solidificação, ebulição, liquefação, condensação e sublimação.
(E) Fusão, ebulição, condensação, solidificação e evaporação.

Comenta

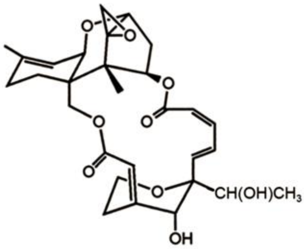
DIAGRAMA DE FASES

De acordo com o diagrama descrito, o ponto P sugere uma substância em fase sólida. Com o aquecimento até 300 °C (passo (1)), o sólido se transforma em líquido (fusão) e em seguida em fluido supercrítico (após e acima do ponto crítico). Em (2), com a queda da pressão, o sistema se estabelece em fase gasosa. Em (3), retorna-se à fase sólida (solidificação) após condensação, e em (4), alcança-se a fase vapor (sublimação).

Resposta correta: (B)

38ª QUESTÃO

Dada a estrutura química da satratoxina-H abaixo, podemos afirmar que essa molécula possui:

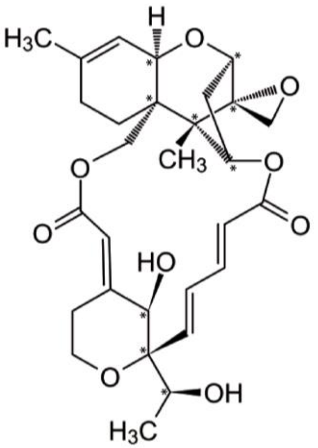


(A) 2 centros quirais e 12 átomos sp^2.
(B) 7 centros quirais e 10 átomos sp^2.
(C) 7 centros quirais e 12 átomos sp^2.
(D) 8 centros quirais e 10 átomos sp^2.
(E) 9 centros quirais e 12 átomos sp^2.

Comenta

ESTRUTURAS ORGÂNICAS

Satratoxina — H



Nota!

C* → átomos ou centros assimétricos (quirais)
Nas ligações duplas há dois átomos com hibridação sp^2 por ligação dupla.
Logo: C = C (2 átomos de carbono com hibridação sp^2);
C = O (1 átomo de carbono com hibridação sp^2 e 1 átomo de oxigênio com hibridação sp^2).

Concluímos que na molécula de satratoxina - H há 9 centros quirais (C*) e 12 átomos com hibridação sp^2, sendo 10 átomos de carbonos sp^2 e 2 átomos de oxigênio sp^2.

Resposta correta: (E)

39ª QUESTÃO

Considere as seguintes afirmativas:

I – Uma reação química a temperatura e pressão constantes será espontânea se a variação da energia livre de Gibbs (ΔG) for menor que zero.

II – Em um sistema reacional onde a única forma de trabalho observável é o trabalho de expansão, a variação da entalpia (ΔH) é igual à quantidade de calor liberada ou absorvida pela reação, a pressão constante.

III – Para uma substância simples que admite mais de uma forma alotrópica, não há variação de entalpia na conversão de uma forma em outra.

São corretas:

(A) Somente I.

(B) Somente II.

(C) Somente III.

(D) I e II.

(E) I e III.

Comenta

TERMODINÂMICA

I. **Correta:** A variação de energia livre de Gibbs avalia a espontaneidade de reações em condição de temperatura e pressão constantes.

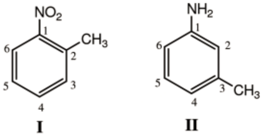
II. **Correta:** Sistemas reacionais têm, em condição de temperatura e pressão constantes, a variação de entalpia como o calor liberado ou absorvido pelo processo. Essa definição é independente do fato de a reação ter trabalho expansivo (aqui sugerido como observável) e não expansivo.

III. **Falsa:** Ocorre troca de calor quando uma forma alotrópica se transforma em outra.

Resposta correta: (D)

40ª QUESTÃO

Considere as duas moléculas abaixo:



I II

Ambas sofrerão nitração nos anéis aromáticos via substituição eletrofílica. Dentre as opções a seguir, a única que indica posições passíveis de substituição nas moléculas **I** e **II**, respectivamente, é:

(A) 4 e 4

(B) 6 e 6

(C) 5 e 2

(D) 3 e 5

(E) 4 e 6

Comenta

SUBSTITUIÇÃO ELETROFÍLICA

No composto I, o grupo nitro é meta-dirigente por efeito mesomérico retirador de elétrons, possibilitando substituição eletrofílica nas posições 3 e 5 do anel aromático. O grupo metila é orto/para-dirigente por efeito indutivo doador de elétrons (+I), ativando as posições 3 (orto) e 5 (meta).

No composto II, ambos os grupos são ativantes, sendo o grupo amino por efeito mesomérico doador de elétrons e o metila por +I. Assim, podemos ter substituição eletrofílica nas posições 2 (orto ao grupo amino e ao metila), 4 (orto ao metila e para ao amino) e 6 (orto ao amino e para ao metila).

Dado que o composto I não sofrerá substituição eletrofílica significativa nas posições 4 e 6, desconsideramos as opções A, B e E. Além disso, o composto II não sofrerá substituição significativa na posição 5, o que nos faz desconsiderar o item D. Portanto, o item C é o correto.

Resposta correta: (C)