# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



#### **VESTIBULAR 2025**

#### 2ª FASE

## **MATEMÁTICA**

### **INSTRUÇÕES**

- 1. O tempo total para resolução da prova é de quatro horas.
- 2. Não é permitido deixar o local de exame antes de decorridas **duas horas** do início da prova.
- 3. Você poderá usar **apenas** caneta esferográfica de corpo transparente com tinta preta, lápis ou lapiseira, borracha, régua transparente simples e compasso. **É proibido portar qualquer outro material escolar.**
- 4. Certifique-se de que você recebeu um caderno de questões e um caderno de soluções.
- 5. Não é permitido destacar qualquer das folhas que compõem os cadernos de questões ou de soluções.
- 6. O caderno de questões é composto por **10 questões dissertativas** (numeradas de 01 a 10).
- 7. A resolução das questões deve ser apresentada nos respectivos cadernos de soluções, **no local destinado a cada questão**.
- 8. Apenas as resoluções presentes nos espaços destinados para uma dada questão serão consideradas na correção dessa questão. Não será considerado para correção o conteúdo das páginas de rascunho.
- 9. Nas questões que envolvem cálculo matemático, as **expressões numéricas devem** ser resolvidas até o final. Em caso contrário, poderá haver prejuízo de nota atribuída à solução.
- 10. É obrigatória a devolução dos cadernos de questões e de soluções, sob pena de desclassificação do candidato.
- 11. No dia 04/12/2024, serão divulgadas as médias obtidas nas provas da segunda fase.
- 12. Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar.

#### **MATEMÁTICA**

**Convenções:** Considere o sistema de coordenadas cartesiano, a menos que haja indicação contrária. Os eixos horizontal e vertical são indicados respectivamente por  $O_x$  e  $O_y$ , e o centro do sistema, por O.

*i* : denota a unidade imaginária,  $i^2 = -1$ .

 $\overline{AB}$ : denota o segmento de reta de extremidades nos pontos  $A \in B$ .

AB : denota a reta que passa pelos pontos A e B.

 $m(\overline{AB})$ : denota o comprimento do segmento  $\overline{AB}$ .  $\max\{i,j\}$ : denota o maior dentre os valores i e j  $\det A$ : denota o determinante da matriz A.  $A^T$ : denota a transposta da matriz A. : denota a inversa da matriz A.

 $(a_{ij})$ : representa uma matriz cuja entrada na linha i e coluna j é indexada por  $a_{ij}$ .

**Questão 1.** Encontre os valores reais a e b tais que o polinômio  $p(x) = x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1$ , ao ser dividido por  $x^2 - x + 1$ , deixe resto 2x + 1.

**Questão 2.** Seja E uma elipse com eixo focal no eixo  $O_x$  do sistema de coordenadas cartesiano. O centro de E é o ponto (r,0), com r>0, sua excentricidade é  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , e seu semieixo maior mede  $\sqrt{2}$ . Considerando os pontos  $(x,y)\in E$ , determine o valor de r para que  $\frac{y}{x}$  tenha valor máximo igual a 1.

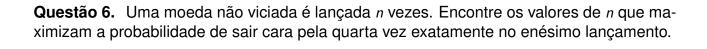
**Questão 3.** Sejam  $\alpha$ ,  $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  tais que

$$\operatorname{sen}(lpha)-\operatorname{sen}(eta)=rac{1}{4}\quad \operatorname{e}\quad \operatorname{sen}(lpha)-2\mathrm{sen}(eta)+\cos(eta)=rac{3}{4}.$$

Calcule o valor de  $sen(\alpha + \beta)$ .

**Questão 4.** Seja ABC um triângulo de lados  $m(\overline{AB}) = 6$ ,  $m(\overline{AC}) = 10$  e  $m(\overline{BC}) = 14$ . Calcule o raio da circunferência externa ao triângulo ABC que tangencia simultaneamente o segmento  $\overline{BC}$  e as retas suportes AB e AC.

**Questão 5.** Usando as aproximações  $\log_{10} 2 = 0$ , 3010,  $\log_{10} 3 = 0$ , 4771 e  $\log_{10} 7 = 0$ , 8450, determine o primeiro algarismo (da esquerda para a direita) do resultado de  $3^{100}$ .



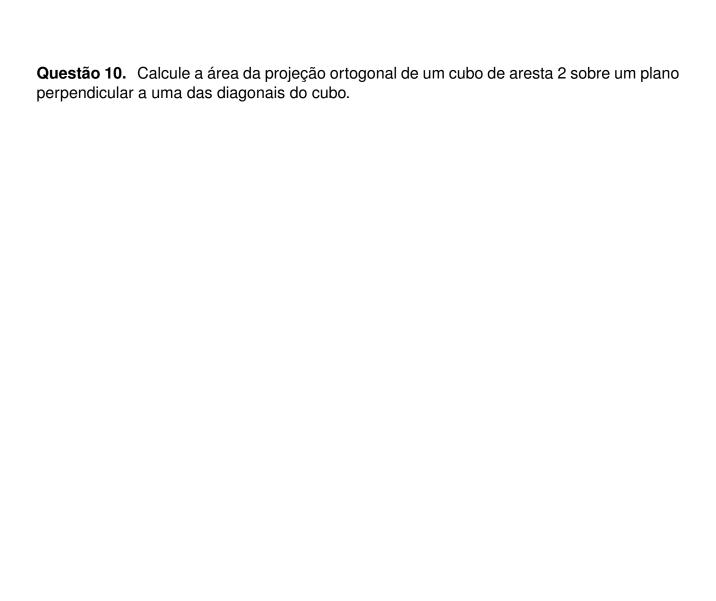
**Questão 7.** Considere o polinômio  $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ . Determine os valores reais  $a \in b$ , sabendo que:

**I.** p(x) tem uma raiz real dupla;

II. Os pontos  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$  e (0, b) são vértices de um triângulo retângulo, em que  $x_1$  e  $x_2$  são raizes disitintas de p(x).

**Questão 8.** Seja  $A_k = (a_{ij})$  uma matriz quadrada de ordem k, em que  $a_{ij} = \max\{i, j\}$  para todo i, j em  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Determine  $\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k)$ .

**Questão 9.** Determine a quantidade de matrizes  $5 \times 5$  invertíveis e com entradas inteiras que satisfazem a propriedade  $A^{-1} = A^{T}$ .



## **RASCUNHO**