

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

VESTIBULAR 2014



PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Esta prova tem duração de **quatro horas**.
2. Não é permitido deixar o local de exame antes de decorridas **duas horas** do início da prova.
3. Você pode usar apenas lápis (ou lapiseira), caneta, borracha e régua. **É proibido portar qualquer outro material escolar.**
4. Esta prova é composta de **20 questões de múltipla escolha** (numeradas de 01 a 20) e de **10 questões dissertativas** (numeradas de 21 a 30).
5. As 20 questões de múltipla escolha correspondem a 50% do valor da prova e as questões dissertativas, aos 50% restantes.
6. Você recebeu este **caderno de questões e um caderno de soluções com duas folhas de rascunho**. Verifique se o caderno de questões está completo.
7. Numere sequencialmente de 21 a 30, a partir do verso da capa, cada página do caderno de soluções. O número atribuído a cada página corresponde ao da questão a ser resolvida. **Não** escreva no verso da parte superior da capa (região sombreada) do caderno de soluções. As **folhas centrais coloridas** deverão ser utilizadas **apenas como rascunho** e, portanto, **não** devem ser numeradas **nem** destacadas pelo candidato.
8. Cada questão de múltipla escolha admite **uma única** resposta.
9. As resoluções das questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, podem ser feitas a lápis e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Respeite a ordem e o espaço disponível no caderno de soluções. Sempre que possível, use desenhos e gráficos.
10. Antes do final da prova, você receberá uma **folha de leitura óptica, destinada à transcrição das respostas das questões numeradas de 01 a 20**. Usando **caneta preta**, assinale a opção correspondente à resposta de cada uma das questões de múltipla escolha. Você deve preencher todo o campo disponível para a resposta, sem extrapolar-lhe os limites, conforme instruções na folha de leitura óptica.
11. Cuidado para não errar no preenchimento da folha de leitura óptica. Se isso ocorrer, avise o fiscal, que lhe fornecerá uma folha extra com o cabeçalho devidamente preenchido.
12. **Não haverá tempo suplementar para o preenchimento da folha de leitura óptica.**
13. Na última página do caderno de soluções, existe uma reprodução da folha de leitura óptica, que deverá ser preenchida com um simples traço a lápis durante a realização da prova.
14. A **não devolução** do caderno de soluções, do caderno de questões ou da folha de leitura óptica implicará a **desclassificação do candidato**.
15. **Somente** os candidatos que permanecerem na sala até o final das quatro horas de prova estarão autorizados a levar o caderno de questões.
16. No dia 27/12/2013, a partir das 10:00 horas, o gabarito da parte objetiva desta prova estará disponibilizado no *site* do ITA (www.ita.br).
17. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar.**

NOTAÇÕES

\mathbb{N} : conjunto dos números naturais; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

\mathbb{Z} : conjunto dos números inteiros

\mathbb{Q} : conjunto dos números racionais

\mathbb{R} : conjunto dos números reais

\mathbb{C} : conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

\bar{z} : conjugado do número $z \in \mathbb{C}$

$\text{Re}(z)$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$

$\det A$: determinante da matriz A

A^t : transposta da matriz A

$\mathcal{P}(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

$P(A)$: probabilidade de ocorrência do evento A

$f \circ g$: função composta das funções f e g

$[a, b]$ = $\{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

$[a, b[$ = $\{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

$]a, b]$ = $\{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

$]a, b[$ = $\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

$A \setminus B$ = $\{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$\sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k, k \in \mathbb{N}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1. Das afirmações:

I. Se $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

III. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a < b < c$. Se $f: [a, c] \rightarrow [a, b]$ é sobrejetora, então f não é injetora, é (são) verdadeira(s)

A () apenas I e II.

B () apenas I e III.

C () apenas II e III.

D () apenas III.

E () nenhuma.

Questão 8. Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n , com A inversível e B antissimétrica:

- I. Se o produto AB for inversível, então n é par;
- II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;
- III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I.
- B () apenas I e II.
- C () apenas I e III.
- D () apenas II e III.
- E () todas.

Questão 9. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

- I. BA é antissimétrica;
- II. BA não é inversível ;
- III. O sistema $(BA)X = 0$, com $X^t = [x_1 \ x_2 \ x_3]$, admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I e II.
- B () apenas II e III.
- C () apenas I.
- D () apenas II.
- E () apenas III.

Questão 10. Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9} \det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

- A () $\frac{1}{3}$.
- B () $\frac{1}{2}$.
- C () $\frac{2}{3}$.
- D () $\frac{4}{5}$.
- E () $\frac{5}{4}$.

Questão 11. Considere a equação $A(t)X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x , y e z são, respectivamente,

- A () $2\sqrt{2}$, 0 , $-3\sqrt{2}$.
- B () $-2\sqrt{2}$, 0 , $-3\sqrt{2}$.
- C () 0 , $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.
- D () 0 , $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.
- E () $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0 .

Questão 12. Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + az^3 + 5z^2 - iz - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

- A () $-3i, -1, 1.$ B () $-i, i, 1.$ C () $-i, i, -1.$
 D () $-2i, -1, 1.$ E () $-2i, -i, i.$

Questão 13. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, um possível valor para $\operatorname{cosec} 2x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ é

- A () $\frac{a-b}{ab}.$ B () $\frac{a+b}{2ab}.$ C () $\frac{a^2 - b^2}{ab}.$ D () $\frac{a^2 + b^2}{4ab}.$ E () $\frac{a^2 - b^2}{4ab}.$

Questão 14. Considere o triângulo ABC retângulo em A . Sejam \overline{AE} e \overline{AD} a altura e a mediana relativa à hipotenusa \overline{BC} , respectivamente. Se a medida de \overline{BE} é $(\sqrt{2} - 1)$ cm e a medida de \overline{AD} é 1 cm, então \overline{AC} mede, em cm,

- A () $4\sqrt{2} - 5.$ B () $3 - \sqrt{2}.$ C () $\sqrt{6 - 2\sqrt{2}}.$ D () $3(\sqrt{2} - 1).$ E () $3\sqrt{4\sqrt{2} - 5}.$

Questão 15. Seja ABC um triângulo de vértices $A = (1, 4)$, $B = (5, 1)$ e $C = (5, 5)$. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

- A () $\frac{15}{8}.$ B () $\frac{5\sqrt{17}}{4}.$ C () $\frac{3\sqrt{17}}{5}.$ D () $\frac{5\sqrt{17}}{8}.$ E () $\frac{17\sqrt{5}}{8}.$

Questão 16. Em um triângulo isósceles ABC , cuja área mede 48 cm^2 , a razão entre as medidas da altura \overline{AP} e da base \overline{BC} é igual a $\frac{2}{3}$. Das afirmações abaixo:

- I. As medianas relativas aos lados \overline{AB} e \overline{AC} medem $\sqrt{97}$ cm;
 II. O baricentro dista 4 cm do vértice A ;
 III. Se α é o ângulo formado pela base \overline{BC} com a mediana \overline{BM} , relativa ao lado \overline{AC} , então $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{97}}$,

é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas II. C () apenas III.
 D () apenas I e III. E () apenas II e III.

Questão 17. Considere o trapézio $ABCD$ de bases \overline{AB} e \overline{CD} . Sejam M e N os pontos médios das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , respectivamente. Então, se \overline{AB} tem comprimento x e \overline{CD} tem comprimento $y < x$, o comprimento de \overline{MN} é igual a

- A () $x - y.$ B () $\frac{1}{2}(x - y).$ C () $\frac{1}{3}(x - y).$ D () $\frac{1}{3}(x + y).$ E (~~X~~) $\frac{1}{4}(x + y).$

Questão 18. Uma pirâmide de altura $h = 1 \text{ cm}$ e volume $V = 50 \text{ cm}^3$ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n - 3$ diagonais que o decompõem em $n - 2$ triângulos cujas áreas $S_i, i = 1, 2, \dots, n - 2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2} \text{ cm}^2$ e $S_6 = 3 \text{ cm}^2$. Então n é igual a

- A () 22. B () 24. C () 26. D () 28. E () 32.

Questão 19. A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas $r : 2x - 2y + 5 = 0$ e $s : x + y - 4 = 0$ é

- A () $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - \frac{10}{4})^2 = 4$.
 B () $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 = 4$.
 C () $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{10}{4})^2 = 4$.
 D () $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{13}{4})^2 = 4$.
 E (X) $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{11}{4})^2 = 4$.

Questão 20. Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base \overline{BC} que dista $0,25 \text{ cm}$ do vértice A e $0,75 \text{ cm}$ da base \overline{BC} . Se o lado \overline{AB} mede $\frac{\sqrt{\pi^2 + 1}}{2\pi} \text{ cm}$, o volume desse sólido, em cm^3 , é igual a

- A () $\frac{9}{16}$. B () $\frac{13}{96}$. C () $\frac{7}{24}$. D () $\frac{9}{24}$. E () $\frac{11}{96}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Considere as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\alpha x}$, em que α é uma constante real positiva, e $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$. Determine o conjunto-solução da inequação $(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x)$.

Questão 22. Determine as soluções reais da equação em x , $(\log_4 x)^3 - \log_4(x^4) - 3 \frac{\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0$.

Questão 23.

- a) Determine o valor máximo de $|z + i|$, sabendo que $|z - 2| = 1, z \in \mathbb{C}$.
 b) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine z_0 .

Questão 24. Seja Ω o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se $A \subset \Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a 9 e $B \subset \Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:

- a) $n(\Omega)$;
 b) $n(A)$ e $n(B)$;
 c) $P(A)$ e $P(B)$.

Questão 25. Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

Questão 26. Considere o sistema linear nas incógnitas x , y e z

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + (\operatorname{sen} \theta) y + 4z = 0 \\ 2x + (1 - \cos 2\theta) y + 16z = 0 \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

- a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.
b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

Questão 27. Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem, simultaneamente, a

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\cos x - 1} < 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3} \operatorname{cotg} x) \operatorname{cotg} x.$$

Questão 28. Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Questão 29. Três circunferências C_1 , C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1 , r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. A soma dos comprimentos de C_1 , C_2 e C_3 é igual a 26π cm. Determine:

- a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1 , C_2 e C_3 .
b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

Questão 30. Um cilindro reto de altura $h = 1$ cm tem sua base no plano xy definida por

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0.$$

Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.