CONCURSO DE ADMISSÃO
AO
CURSO DE FORMAÇÃO E GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA

CADERNO DE QUESTÕES

2019/2020

1ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Sejam a e b raízes da equação $x^2 - 4x + M = 0$, c e d raízes da equação $x^2 - 36x + N = 0$. Sabendo-se que a, b, c e d formam uma progressão geométrica crescente, determine o valor de $M + N$.

2ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Seja uma região **S** no plano complexo que consiste em todos os pontos Z tais que $\frac{Z}{20}$ e $\frac{20}{\bar{Z}}$ possuem partes real e imaginária entre 0 e 1, inclusive. Determine a área da região **S**.

Obs: $\bar{Z}$ é o conjugado do número complexo Z.

3ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Os modelos de placas de identificação de automóveis adotadas no Brasil estão sendo atualizados. Atualmente, o modelo antigo ABC1234 (três letras seguidas de quatro algarismos) está sendo gradativamente substituído pelo modelo novo ABC1D23 (três letras seguidas de um algarismo, uma letra e dois algarismos).

Placas de modelos distintos podem apresentar sequências de caracteres alfanuméricos iguais. Por exemplo, a sequência de caracteres “20” aparece nas combinações IME2020 e BRA5P20, enquanto a sequência “A12” aparece nas combinações BRA1234 e IME4A12.

Considere a placa do modelo antigo IME2019. Seja P o conjunto de placas do modelo novo que podem ser formadas com alguma sequência de três caracteres em comum com a placa IME2019. Determine o número de elementos de P.

Por exemplo, IME4A12 e BRA5E20 pertencem ao conjunto P. IMP5E19 não pertence ao conjunto P.

Obs: considere o alfabeto com 26 letras.

4ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Em um jogo, João e Maria possuem cada um três dados não viciados com seis faces numeradas de 1 a 6. Cada um lançará os seus dados, sendo João o primeiro a lançar. O vencedor será aquele que obtiver o maior número de dados com resultados iguais. Em caso de empate, vencerá aquele que tiver o maior número nos dados de igual resultado. Se ainda houver empate, não haverá vencedor. Suponha que João obteve apenas dois dados com mesmo resultado. Qual é a probabilidade de Maria vencer o jogo?

5ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se e somente se existe uma matriz invertível P tal que $A = P\,B\,P^{-1}$.

a) Se A e B forem semelhantes, mostre que det(A) = det(B).

b) Dadas $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, verifique se essas matrizes são semelhantes.

6ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Sabendo que $i^2 = -1$, encontre todos os valores reais de *x* que satisfazem a seguinte inequação:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{2\log_2 \mathrm{sen}(x) + 1}{i(e^{2ix} - 2\cos^2(x) + 1)}\right\} > 0$$

onde $\mathrm{Re}\{Z\}$ é a parte real do número complexo Z.

7ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Seja $\frac{1}{b} = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{14} . \mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{14} . \mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{14}$. Determine b, onde b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

8ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Os pontos $A(-5,0)$ e $B(5,0)$definem um dos lados do triângulo *ABC*. A bissetriz interna do ângulo correspondente ao vértice *C* é paralela à reta de equação $14x - 2y + 1 = 0$. Determine o valor da excentricidade do lugar geométrico definido pelo vértice *C* deste triângulo.

9ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Sobre uma reta *r* são marcados três pontos distintos *A*, *B* e *C*, sendo que *C* é um ponto externo ao segmento de reta $\overline{AB}$. Determine o lugar geométrico das interseções das retas tangentes a partir de *A* e *B* a qualquer circunferência tangente à reta *r* no ponto *C*. Justifique sua resposta.

10ª QUESTÃO	**Valor: 1,0**

Um determinado material radioativo, com volume inicial Q_0, é manipulado numa usina nuclear. A cada dia o resíduo impuro da substância é descartado, através de uma ligação por um pequeno orifício, num invólucro lacrado em formato de paralelepípedo retângulo. No primeiro dia, a quantidade D_1 descartada corresponde a 1/3 do volume inicial do material e, de um modo geral, a quantidade D_n descartada no n-ésimo dia é dada pela relação:

$$D_n = \frac{1}{3}\, D_{n-1}, \text{para } n \geq 2.$$

Determine as dimensões do invólucro (altura, largura e profundidade) onde se armazena o material descartado de modo que o custo de fabricação seja mínimo (isto é, a superfície lateral tenha área mínima) e tenha capacidade prevista de armazenamento por tempo indeterminado.