INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

VESTIBULAR 2018

PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Esta prova tem duração de **quatro horas**.
2. Não é permitido deixar o local de exame antes de decorridas **duas horas** do início da prova.
3. Você poderá usar **apenas** lápis (ou lapiseira), caneta preta de material transparente, borracha e régua. **É proibido portar qualquer outro material escolar.**
4. Esta prova é composta de **20 questões de múltipla escolha** (numeradas de 01 a 20) e de **10 questões dissertativas** (numeradas de 21 a 30).
5. As 20 questões de múltipla escolha correspondem a 50% do valor da prova e as questões dissertativas, aos 50% restantes.
6. Você recebeu este **caderno de questões e um caderno de soluções com duas folhas de rascunho.** Verifique se o caderno de questões está completo.
7. Numere sequencialmente de 21 a 30, a partir do verso da capa, cada página do caderno de soluções. O número atribuído a cada página corresponde ao da questão a ser resolvida. **Não** escreva no verso da parte superior da capa (região sombreada) do caderno de soluções. As **folhas centrais coloridas** deverão ser utilizadas **apenas como rascunho** e, portanto, **não** devem ser numeradas e **nem** destacadas pelo candidato.
8. Cada questão de múltipla escolha admite **uma única** resposta.
9. As resoluções das questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, podem ser feitas a lápis e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Respeite a ordem e o espaço disponível no caderno de soluções. Sempre que possível, use desenhos e gráficos.
10. Antes do final da prova, você receberá uma **folha de leitura óptica, destinada à transcrição das questões numeradas de 1 a 20.** Usando **caneta preta de material transparente**, assinale a opção correspondente à resposta de cada uma das questões de múltipla escolha. Você deve preencher todo o campo disponível para a resposta, sem extrapolar-lhe os limites, conforme instruções na folha de leitura óptica.
11. Cuidado para **NÃO ERRAR** no preenchimento da folha de leitura óptica. Em hipótese alguma haverá substituição da folha óptica por erro ou mau uso pelo candidato.
12. **Não haverá tempo suplementar para o preenchimento da folha de leitura óptica.**
13. Na última página do caderno de soluções, existe uma reprodução da folha de leitura óptica, que deverá ser preenchida com um simples traço a lápis durante a realização da prova.
14. A **não devolução** do caderno de soluções, do caderno de questões e/ou da folha de leitura óptica implicará a **desclassificação do candidato.**
15. No dia 20/12/2017, a partir das 10:00 horas, o gabarito da parte objetiva desta prova estará disponibilizado no *site* do ITA (www.vestibular.ita.br).
16. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar.**

NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$	: conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	: conjunto dos números naturais
$\mathbb{C}$	: conjunto dos números complexos
i	: unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\|z\|$	: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\det A$	: determinante da matriz A
$\mathrm{d}(A, B)$	: distância do ponto A ao ponto B
$\mathrm{d}(P, r)$	: distância do ponto P à reta r
$\overline{AB}$	: segmento de extremidades nos pontos A e B
$\hat{A}$	: medida do ângulo do vértice A
$[a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$[a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$]a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
$]a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$(f \circ g)(x)$	$= f(g(x))$
$X \setminus Y$	$= \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$
$\sum_{k=0}^{n} a_k$	$= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, sendo n inteiro não negativo

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Os lados de um triângulo de vértices A, B e C medem $AB = 3$ cm, $BC = 7$ cm e $CA = 8$ cm. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto N e o lado $\overline{CA}$ no ponto K. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$, em cm, é

A ( ) 2.
B ( ) $2\sqrt{2}$.
C ( ) 3.
D ( ) $2\sqrt{3}$.
E ( ) $\frac{7}{2}$.

Questão 2. Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

A ( ) $5x^2 + 7x + 9$.
B ( ) $3x^2 + 6x + 8$.
C ( ) $13x^2 + 16x + 12$.
D ( ) $7x^2 + 5x + 9$.
E ( ) $9x^2 + 3x + 10$.

Questão 3. Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7920, então $a + b$ é

A ( ) 2. B ( ) 3. C ( ) 4. D ( ) 5. E ( ) 6.

Questão 4. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por

A ( ) $b + ad = d + bc$. B ( ) $d + ba = c + db$. C ( ) $a + db = b + cd$.
D ( ) $b + ac = d + ba$. E ( ) $c + da = b + cd$.

Questão 5. Sejam $x_1, \ldots, x_5$ e $y_1, \ldots, y_5$ números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz 5×5 definida por $a_{ij} = x_i + y_j$, $1 \leq i, j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

A ( ) 1. B ( ) 2. C ( ) 3. D ( ) 4. E ( ) 5.

Questão 6. Sobre duas retas paralelas r e s são tomados 13 pontos, m pontos em r e n pontos em s, sendo $m > n$. Com os pontos são formados todos os triângulos e quadriláteros convexos possíveis. Sabe-se que o quociente entre o número de quadriláteros e o número de triângulos é $15/11$. Então, os valores de n e m são, respectivamente,

A ( ) 2 e 11. B ( ) 3 e 10. C ( ) 4 e 9. D ( ) 5 e 8. E ( ) 6 e 7.

Questão 7. Considere a definição: duas circunferências são *ortogonais* quando se interceptam em dois pontos distintos e nesses pontos suas tangentes são perpendiculares. Com relação às circunferências $C_1 : x^2 + (y+4)^2 = 7$, $C_2 : x^2 + y^2 = 9$ e $C_3 : (x-5)^2 + y^2 = 16$, podemos afirmar que

A ( ) somente C_1 e C_2 são ortogonais.
B ( ) somente C_1 e C_3 são ortogonais.
C ( ) C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.
D ( ) C_1, C_2 e C_3 são ortogonais duas a duas.
E ( ) não há ortogonalidade entre as circunferências.

Questão 8. As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

A ( ) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. B ( ) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. C ( ) $\sqrt{2}$.
D ( ) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2}$. E ( ) $3\sqrt{2}$.

Questão 9. Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então

A ( ) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$.
B ( ) $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$.
C ( ) $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2}$.
D ( ) $\frac{3}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$.
E ( ) $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Questão 10. O lugar geométrico das soluções da equação $x^2 + bx + 1 = 0$, quando $|b| < 2$, $b \in \mathbb{R}$, é representado no plano complexo por

A ( ) dois pontos.
B ( ) um segmento de reta.
C ( ) uma circunferência menos dois pontos.
D ( ) uma circunferência menos um ponto.
E ( ) uma circunferência.

Questão 11. Em um triângulo de vértices A, B e C são dados $\hat{B} = \pi/2$, $\hat{C} = \pi/3$ e o lado $BC = 1$ cm. Se o lado $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência, então a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência, em cm^2, é

A ( ) $\frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$.
B ( ) $\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}$.
C ( ) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
D ( ) $\frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$.
E ( ) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Questão 12. Com relação à equação $\frac{\mathrm{tg}^3 x - 3\mathrm{tg} x}{1 - 3\mathrm{tg}^2 x} + 1 = 0$, podemos afirmar que

A ( ) no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é igual a 0.
B ( ) no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 0.
C ( ) a equação admite apenas uma solução real.
D ( ) existe uma única solução no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
E ( ) existem duas soluções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Questão 13. Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$ tais que $A + B = A \cdot B$ e I_n a matriz identidade $n \times n$. Das afirmações:

I. $I_n - B$ é inversível;
II. $I_n - A$ é inversível;
III. $A \cdot B = B \cdot A$.

é (são) verdadeira(s)

A ( ) Somente I.
B ( ) Somente II.
C ( ) Somente III.
D ( ) Somente I e II.
E ( ) Todas.

Questão 14. Se o sistema $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2a^2y+(2a^4-a)z &= 0 \\ x+ay+(a^3-1)z &= 0 \end{cases}$ admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

A ( ) $0, -1, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

B ( ) $0, -1, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

C ( ) $0, -1, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

D ( ) $0, -1, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}$.

E ( ) $0, -1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

Questão 15. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Se o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x) = \det A$, então o produto das raízes de $p(x)$ é

A ( ) $\frac{1}{2}$. B ( ) $\frac{1}{3}$. C ( ) $\frac{1}{5}$. D ( ) $\frac{1}{7}$. E ( ) $\frac{1}{11}$.

Questão 16. Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

A ( ) 10. B ( ) 12. C ( ) 15. D ( ) 20. E ( ) 30.

Questão 17. Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum $\overline{AB}$. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se $MN = CN = 2$ cm, então a altura relativa ao lado $\overline{CD}$ do triângulo ACD mede, em cm,

A ( ) $\dfrac{\sqrt{60}}{3}$. B ( ) $\dfrac{\sqrt{50}}{3}$. C ( ) $\dfrac{\sqrt{40}}{3}$. D ( ) $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. E ( ) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Questão 18. Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2+5n$. Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7+2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

A ( ) -96. B ( ) -85. C ( ) 63. D ( ) 99. E ( ) 115.

Questão 19. São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P_1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P_2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então $P_1 + P_2$ vale

A ( ) $\frac{8}{15}$. B ( ) $\frac{7}{15}$. C ( ) $\frac{6}{15}$. D ( ) 1. E ( ) $\frac{17}{15}$.

Questão 20. Para que o sistema $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x^3+y^3 &= c^2 \end{cases}$ admita apenas soluções reais, todos os valores reais de c pertencem ao conjunto

A ( ) $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[$. B ( ) $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$. C ( ) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$.

D ( ) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$. E ( ) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão -5. Determine o número de vértices do poliedro.

Questão 22. Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial: $3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$.

Questão 23. No plano cartesiano são dadas as circunferências $C_1 : x^2+y^2 = 1$ e $C_2 : (x-4)^2+y^2 = 4$. Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2, passando pelo ponto $A = (3, \sqrt{3})$.

Questão 24. Seja $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$. Pedem-se:

a) Use a propriedade $z^k = \cos\frac{k\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{7}$, $k \in \mathbb{N}$, para expressar $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$ e $\cos\frac{5\pi}{7}$ em função de z.

b) Determine inteiros a e b tais que $\frac{a}{b} = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$.

Questão 25. Uma reta r separa um plano π em dois semiplanos π_1 e π_2. Considere pontos A e B tais que $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$ de modo que $d(A, r) = 3$, $d(B, r) = 6$ e $d(A, B) = 15$. Uma circunferência contida em π passa pelos pontos A e B e encontra r nos pontos M e N. Determine a menor distância possível entre os pontos M e N.

Questão 26. De uma caixa que contém 10 bolas brancas e 6 bolas pretas, são selecionadas ao acaso k bolas.

a) Qual a probabilidade de que exatamente r bolas sejam brancas, nas condições $0 \leq k - r \leq 6$ e $0 \leq k \leq 10$.

b) Use o item (a) para calcular a soma

$$\sum_{r=0}^{6} \binom{10}{r} \binom{6}{6-r}.$$

Questão 27. Quantos pares de números inteiros positivos (A, B) existem cujo mínimo múltiplo comum é 126×10^3? Para efeito de contagem, considerar $(A, B) \equiv (B, A)$.

Questão 28. A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\dfrac{25\pi}{2}$ cm^2. Dois planos, π_1 e π_2, paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

Questão 29. Seja $p(x)$ um polinômio não nulo. Se $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de $p(x)$, determine o menor grau possível de $p(x)$.

Questão 30. No plano cartesiano são dados o ponto $P = (0, 3)$ e o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (3, 2)$. Determine um ponto N sobre o eixo dos x de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.