

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

VESTIBULAR 2017



PROVA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Esta prova tem duração de **quatro horas**.
2. Não é permitido deixar o local de exame antes de decorridas **duas horas** do início da prova.
3. Você poderá usar **apenas** lápis (ou lapiseira), caneta preta de material transparente, borracha e régua. **É proibido portar qualquer outro material escolar.**
4. Esta prova é composta de **20 questões de múltipla escolha** (numeradas de 01 a 20) e de **10 questões dissertativas** (numeradas de 21 a 30).
5. As 20 questões de múltipla escolha correspondem a 50% do valor da prova e as questões dissertativas, aos 50% restantes.
6. Você recebeu este **caderno de questões e um caderno de soluções com duas folhas de rascunho**. Verifique se o caderno de questões está completo.
7. Numere sequencialmente de 21 a 30, a partir do verso da capa, cada página do caderno de soluções. O número atribuído a cada página corresponde ao da questão a ser resolvida. **Não** escreva no verso da parte superior da capa (região sombreada) do caderno de soluções. As **folhas centrais coloridas** deverão ser utilizadas **apenas como rascunho** e, portanto, **não** devem ser numeradas e **nem** destacadas pelo candidato.
8. Cada questão de múltipla escolha admite **uma única** resposta.
9. As resoluções das questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, podem ser feitas a lápis e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Respeite a ordem e o espaço disponível no caderno de soluções. Sempre que possível, use desenhos e gráficos.
10. Antes do final da prova, você receberá uma **folha de leitura óptica, destinada à transcrição das questões numeradas de 1 a 20**. Usando **caneta preta de material transparente**, assinale a opção correspondente à resposta de cada uma das questões de múltipla escolha. Você deve preencher todo o campo disponível para a resposta, sem extrapolar-lhe os limites, conforme instruções na folha de leitura óptica.
11. Cuidado para não errar no preenchimento da folha de leitura óptica. Se isso ocorrer, avise o fiscal, que lhe fornecerá uma folha extra, com o cabeçalho devidamente preenchido.
12. **Não haverá tempo suplementar para o preenchimento da folha de leitura óptica.**
13. Na última página do caderno de soluções, existe uma reprodução da folha de leitura óptica, que deverá ser preenchida com um simples traço a lápis durante a realização da prova.
14. A **não devolução** do caderno de soluções, do caderno de questões e/ou da folha de leitura óptica implicará a **desclassificação do candidato**.
15. No dia 20/12/2016, a partir das 10:00 horas, o gabarito da parte objetiva desta prova estará disponibilizado no *site* do ITA (www.vestibular.ita.br).
16. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar.**

NOTAÇÕES

\mathbb{R} : conjunto dos números reais

\mathbb{C} : conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária $i^2 = -1$

$\det M$: determinante da matriz M

M^{-1} : inversa da matriz M

MN : produto das matrizes M e N

\overline{AB} : segmento de reta de extremidades nos pontos A e B

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Sejam X e Y dois conjuntos finitos com $X \subset Y$ e $X \neq Y$. Considere as seguintes afirmações:

I. Existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$.

II. Existe uma função injetora $g : Y \rightarrow X$.

III. O número de funções injetoras $f : X \rightarrow Y$ é igual ao número de funções sobrejetoras $g : Y \rightarrow X$.

É (são) verdadeira(s)

A () nenhuma delas.

B () apenas I.

C () apenas III.

D () apenas I e II.

E () todas.

Questão 2. O número de soluções da equação $(1 + \sec\theta)(1 + \operatorname{cosec}\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

A () 0.

B () 1.

C () 2.

D () 3.

E () 4.

Questão 3. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, b/2, c/4, d - 140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é

A () -140.

B () -120.

C () 0.

D () 120.

E () 140.

Questão 4. O maior valor de $\operatorname{tg} x$, com $x = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, é

A () $1/4$.

B () $1/3$.

C () $1/2$.

D () 2.

E () 3.

Questão 5. Considere a reta $r: y = 2x$. Seja $A = (3, 3)$ o vértice de um quadrado $ABCD$, cuja diagonal \overline{BD} está contida em r . A área deste quadrado é

A () $\frac{9}{5}$.

B () $\frac{12}{5}$.

C () $\frac{18}{5}$.

D () $\frac{21}{5}$.

E () $\frac{24}{5}$.

Questão 6. Considere o sistema de equações

$$S \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{27}{y^2} + \frac{8}{z^3} = 3 \\ \frac{4}{x} + \frac{81}{y^2} + \frac{40}{z^3} = 10 \\ \frac{2}{x} + \frac{54}{y^2} + \frac{24}{z^3} = 7 \end{cases}$$

Se (x, y, z) é uma solução real de S , então $|x| + |y| + |z|$ é igual a

- A () 0. B () 3. C () 6. D () 9. E () 12.

Questão 7. O número de soluções inteiras da inequação $0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2$ é

- A () 1. B () 2. C () 3. D () 4. E () 5.

Questão 8. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

- A () 10. B () 11. C () 12. D () 13. E () 14.

Questão 9. Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq ||x| - 1|\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 25\}$. A área da região $S_1 \cap S_2$ é

- A () $\frac{25}{4}\pi - 2$. B () $\frac{25}{4}\pi - 1$. C () $\frac{25}{4}\pi$. D () $\frac{75}{4}\pi - 1$. E () $\frac{75}{4}\pi - 2$.

Questão 10. Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_c a)}$.

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$.

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas II. C () apenas I e II.
D () apenas II e III. E () todas.

Questão 11. Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Considere $A = P^{-1}DP$. O valor de $\det(A^2 + A)$ é

- A () 144. B () 180. C () 240. D () 324. E () 360.

Questão 12. Considere dois círculos no primeiro quadrante:

- C_1 com centro (x_1, y_1) , raio r_1 e área $\frac{\pi}{16}$.
- C_2 com centro (x_2, y_2) , raio r_2 e área 144π .

Sabendo que (x_1, y_1, r_1) e (x_2, y_2, r_2) são duas progressões geométricas com somas dos termos iguais a $\frac{7}{4}$ e 21, respectivamente, então a distância entre os centros de C_1 e C_2 é igual a

- A () $\frac{\sqrt{123}}{2}$. B () $\frac{\sqrt{129}}{2}$. C () $\frac{\sqrt{131}}{2}$. D () $\frac{\sqrt{135}}{2}$. E () $\frac{\sqrt{137}}{2}$.

Questão 13. Das afirmações:

- Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma $2^{k-1}(2m-1)$, em que k e m são inteiros positivos.
- Existe um número $x \in [0, \pi/2]$ de tal modo que os números $a_1 = \sin x$, $a_2 = \sin(x + \pi/4)$, $a_3 = \sin(x + \pi/2)$ e $a_4 = \sin(x + 3\pi/4)$ estejam, nesta ordem, em progressão geométrica.
- Existe um número inteiro primo p tal que \sqrt{p} é um número racional.

é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas II. C () apenas III.
D () apenas I e II. E () todas.

Questão 14. Com os elementos $1, 2, \dots, 10$ são formadas todas as seqüências (a_1, a_2, \dots, a_7) . Escolhendo-se aleatoriamente uma dessas seqüências, a probabilidade de a seqüência escolhida não conter elementos repetidos é

- A () $\frac{7!}{10^7 \cdot 3!}$. B () $\frac{10!}{10^7 \cdot 3!}$. C () $\frac{3!}{10^7 \cdot 7!}$. D () $\frac{10!}{10^3 \cdot 7!}$. E () $\frac{10!}{10^7}$.

Questão 15. Considere a equação $(a-bi)^{501} = \frac{2(a+bi)}{(a^2+b^2)^{250} + 1}$.

O número de pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação é

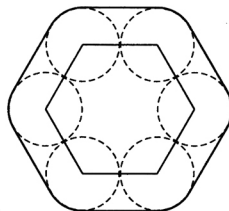
- A () 500. B () 501. C () 502. D () 503. E () 504.

Questão 16. Seja ABC um triângulo cujos lados \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. Considere os pontos M e N sobre o lado \overline{BC} tais que \overline{AM} é a altura relativa a \overline{BC} e N é o ponto médio de \overline{BC} . A área do triângulo AMN , em cm^2 , é

- A () 3,36. B () 3,60. C () 4,20. D () 4,48. E () 6,72.

Questão 17. Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo. O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm,

- A () $18 + 3\pi$.
 B () $30 + 10\pi$.
 C () $18 + 6\pi$.
 D () $60 + 10\pi$.
 E () $36 + 6\pi$.



Questão 18. O lugar geométrico dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação, em $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$

possua uma raiz puramente imaginária é

- A () uma circunferência.
 B () uma parábola.
 C () uma hipérbole.
 D () uma reta.
 E () duas retas paralelas.

Questão 19. Um atirador dispõe de três alvos para acertar. O primeiro deste encontra-se a 30m de distância; o segundo, a 40m; o terceiro alvo, a 60m. Sabendo que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância e que a probabilidade de ele acertar o primeiro alvo é de $2/3$, então a probabilidade de acertar ao menos um dos alvos é

- A () $\frac{120}{160}$. B () $\frac{119}{154}$. C () $\frac{110}{144}$. D () $\frac{105}{135}$. E () $\frac{119}{144}$.

Questão 20. Considere o triângulo ABC , em que os segmentos \overline{AC} , \overline{CB} e \overline{AB} medem, respectivamente, 10 cm, 15 cm e 20 cm. Seja D um ponto do segmento \overline{AB} de tal modo que \overline{CD} é bissetriz do ângulo \widehat{ACB} e seja E um ponto do prolongamento de \overline{CD} , na direção de D , tal que $D\widehat{BE} = D\widehat{CB}$. A medida, em cm, de \overline{CE} é

- A () $\frac{11\sqrt{6}}{3}$. B () $\frac{13\sqrt{6}}{3}$. C () $\frac{17\sqrt{6}}{3}$. D () $\frac{20\sqrt{6}}{3}$. E () $\frac{25\sqrt{6}}{3}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Considere as retas de equações

$$r : y = \sqrt{2}x + a \quad \text{e} \quad s : y = bx + c,$$

em que a, b, c são reais. Sabendo que r e s são perpendiculares entre si, com r passando por $(0, 1)$ e s , por $(\sqrt{2}, 4)$, determine a área do triângulo formado pelas retas r , s e o eixo x .

Questão 22. Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$

Questão 23. Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2.$$

a) Determine os números reais a e b tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.

b) Determine as raízes de $p(x)$.

Questão 24. Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f : B \rightarrow A$ existem?

Questão 25. Sejam $A = \{1, 2, \dots, 29, 30\}$ o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1, a_2, a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q > 1$.

a) Determine todas as progressões geométricas (a_1, a_2, a_3) de razão $q = \frac{3}{2}$.

b) Escreva $q = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$. Determine o maior valor possível para n .

Questão 26. Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left| 2^{-|x|} - \frac{1}{2} \right|$$

Questão 27. Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}$$

Questão 28. Um triângulo retângulo com hipotenusa $c = 2(1 + \sqrt{6})$ está circunscrito a um círculo de raio unitário. Determine a área total da superfície do cone obtido ao girar o triângulo em torno do seu maior cateto.

Questão 29. Determine o conjunto das soluções reais da equação $3\operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}^2 x = 1$.

Questão 30. Considere o cubo $ABCDEFGH$ de aresta 2 tal que: $ABCD$ é o quadrado da base inferior; $EFGH$, o quadrado da base superior e \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CG} e \overline{DH} são as arestas verticais. Sejam L , M e N os pontos médios das arestas \overline{AB} , \overline{CG} e \overline{GH} , respectivamente. Determine a área do triângulo LMN .